ANALYSIS I FÜR TPH, VO (103.057)

Vorlesungsprüfung (DO, 31.01.2013) (*mit Lösung*)

- **Aufgabe 1.**

a) Beweisen Sie *[a): 2 P.]*

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(1+k)!}{1+k^{-1}} = (n+1)! \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N}$$

Vollständige Induktion:

- $n=1: \; 1+\frac{2!}{2} = 2 = (1+1)!$ O.K.
- $n\mapsto n+1:$

$$1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(1+k)!}{1+k^{-1}} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(1+k)!}{1+k^{-1}} + \frac{(1+n+1)!}{1+\frac{1}{n+1}}$$

$$\overset{IND}{=} (n+1)! + \frac{(n+2)!}{\frac{n+2}{n+1}} = (n+1)! + (n+1)!\,(n+1)$$

$$= (n+1)!\,(1+n+1) = (n+2)! \qquad \text{O.K.}$$

b) Geben Sie die Menge der Werte $c>0$ an, für die $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\big(\ln c\big)^{2k}$ absolut konvergiert, und für den konvergenten Fall auch den Wert der Reihe. *[b): 1.5 P.]*

Geometrische Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, mit $q=(\ln c)^2$: Konvergent für $|q|<1$, d.h.

$$(\ln c)^2 < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |\ln c| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad c\in\Big(\frac{1}{e},\,e\Big)$$

Wert der Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big(\ln(c)\big)^{2k} = \frac{1}{1-(\ln c)^2}$$

c) Berechnen Sie den Limes der Folge $\displaystyle E_n := \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!\,(2n)^j\,j\,!}$ für $n\to\infty$. *[c): 2.5 P.]*

Verwende 'Binomi':

$$E_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\Big(\frac{1}{2\,n}\Big)^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\Big(\frac{1}{2\,n}\Big)^j 1^{n-j} = \Big(1+\frac{1}{2\,n}\Big)^n = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

Oder so:

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{2\,n}\Big)^{2\,n}} = \sqrt{e}$$

(Stetigkeit der Wurzelfunktion).

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei die Funktion $\boxed{f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)}$

a) Führen Sie für $f(x)$ eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze. *[a): 4 P.]*

Anmerkung: Die hinreichende Bedingung dafür, dass ein Kandidat für einen Wendepunkt tatsächlich ein solcher ist, brauchen Sie nicht zu überprüfen. Geben Sie jedoch an, wie diese Bedingung lautet.

- $f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$ wohldefiniert für $x > 0$
- $f(x) \to +\infty$ für $x \to 0+$ und $x \to \infty$
- Keine Nullstelle: $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x + \frac{1}{x} = 1$ ... keine reelle Lösung
- f nimmt nur positive Werte an
- $$f'(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 1}{x + x^3} = 0 \quad \text{für} \quad x = 1$$

  (globales Minimum), mit $f(1) = \ln 2$
- $$f''(x) = \frac{2x\,(x + x^3) - (x^2 - 1)\,(1 + 3\,x^2)}{x^2\,(1 + x^2)^2} = \frac{1 + 4\,x^2 - x^4}{x^2\,(1 + x^2)^2}$$

  $f''(1) = 1 > 0$ (Minimalstelle);

  $$f''(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^4 - 4\,x^2 - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad x = \sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx 2.06$$

  ... Wendepunkt. Dritte Ableitung:

  $$f'''\left(\sqrt{2 + \sqrt{5}}\right) = \frac{2\left((2 + \sqrt{5})^3 - 9\,(2 + \sqrt{5})^2 - 7 - 3\sqrt{5}\right)}{(2 + \sqrt{5})^{3/2}\,(3 + \sqrt{5})^3} \approx -0.16 \neq 0$$
- [Skizze]

b) Geben Sie ein maximales $c > 0$ an, so dass die oben gegebene Funktion $f(x)$ auf $(0, c)$ injektiv ist, und berechnen Sie die zugehörige Umkehrfunktion. *[b): 2 P.]*

a) $\Rightarrow$ $f(x)$ ist injektiv (strikt monoton fallend) auf $(0, 1)$.

Bestimmung der Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$, $y \geq f(1) = \ln 2$:

Löse die Gleichung $f(x) = y$ für $y \geq \ln 2$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = y \quad\Leftrightarrow\quad x + \frac{1}{x} = e^y \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - x\,e^y + 1 = 0 \quad \text{(quadr. Glg. für } x\text{)}$$

$\Longrightarrow$

$$f^{-1}(y) = x = \frac{1}{2}\left(e^y - \sqrt{e^{2y} - 4}\right), \quad y \geq \ln 2$$

• **Aufgabe 3.**

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) *[a): 3.5 P]*

$$\boxed{\int x^{-3}\, e^{\left(1-\frac{1}{x}\right)}\, dx}$$

Substitution:

$$I \;=\; \int x^{-3}\, e^{\left(1-\frac{1}{x}\right)}\, dx \;=\; \left| \begin{array}{c} 1-\dfrac{1}{x} = u \\ \dfrac{dx}{x^2} = du \end{array} \right|$$

$$= \int (1-u)\, e^u\, du \;=\; e^u + \int u\, e^u\, du$$

mit

$$\int \underbrace{u}_{f}\, \underbrace{e^u}_{g'}\, du \;=\; \underbrace{u}_{f}\, \underbrace{e^u}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^u}_{g}\, du \;=\; (u-1)\, e^u$$

$\Longrightarrow$

$$I \;=\; (2-u)\, e^u \;=\; \left(1+\frac{1}{x}\right) e^{1-\frac{1}{x}} + C$$

b) *[b): 2.5 P]*

$$\boxed{\int \frac{t^3}{1+t^2}\, dt}$$

Zunächst Polynomdivision, oder direkt umformen:

$$\frac{t^3}{1+t^2} \;=\; \frac{t^3+t}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} \;=\; t - \frac{t}{1+t^2}$$

$\Longrightarrow$

$$I \;=\; \int \frac{t^3}{1+t^2}\, dt \;=\; \frac{t^2}{2} - \int \frac{t}{1+t^2}\, dt$$

mit

$$\int \frac{t}{1+t^2}\, dt \;=\; \left| \begin{array}{c} 1+t^2 = u \\ 2\,t\,dt = du \end{array} \right| \;=\; \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \;=\; \frac{1}{2} \ln|u| \;=\; \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$$

$\Longrightarrow$

$$I \;=\; \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C$$

Oder einfacher direkt mit obiger Substitution:

$$I \;=\; \frac{1}{2} \int \frac{u-1}{u}\, du \;=\; \frac{1}{2}\, u - \frac{1}{2} \ln|u| \qquad \text{O.K.}$$

• **Aufgabe 4.** Man entscheide, ob die folgenden Aussagen zutreffen bzw. ob sie *wahr* (**w**) oder *falsch* (**f**) sind, bzw. *in welchem Spezialfall sie zutreffen oder wie die Aussage ggf. zu modifizieren ist, damit sie stimmt.*

Die Entscheidung für (**w**) oder (**f**) ist in jedem Fall mittels einer kurzen Argumentation (etwa ein *Gegenbeispiel*) bzw. durch explizites Zitat einer aus der Vorlesung bekannten Aussage zu **begründen**. Ggf. beantworte man auch die zusätzlich gestellten Fragen.

a) Eine rationale Funktion, die keinen Pol in $\mathbb{R}$ besitzt, ist auf $\mathbb{R}$ beschränkt. (**w/f?**) *[a): 1 P]*

F Gegenbeispiel: $\dfrac{x^3}{1+x^2}$

b) Sei $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n}$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. (**w/f?**) *[b): 2 P]*

W wegen

$$\sqrt{a_n} \to 0, \quad a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \ \text{ mit } \ a_n < \sqrt{a_n}, \quad n \geq N$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n} \ \text{ konvergente Majorante für } \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

c) Sei $f\colon\, [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf dem offenen Intervall (a,b) 'strikt positive' Funktion, d.h., $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $f(x) \geq \varepsilon > 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann gilt auch $\min_{x\,\in\,[a,b]} f(x) \geq \varepsilon$. (**w/f?**) *[c): 2 P]*

W wegen $f(a) \geq \varepsilon, \ f(b) \geq \varepsilon$

Begründung: Annahme $f(a) < \varepsilon$ (analog für $f(b)$):

$\Longrightarrow \quad \exists\, x > a \ \text{ mit } \ f(x) < \varepsilon$ – Widerspruch.

Alternatives Argument:

$$\lim_{x\,\to\,a+} \underbrace{f(x)}_{\geq\,\varepsilon} \ \geq \ \varepsilon.$$

d) Die Funktion $f(x) = \tanh(1/x)$ ist für $x = 0$ nicht wohldefiniert, sie lässt sich jedoch an der Stelle $x = 0$ von rechts kommend stetig fortsetzen. (**w/f?**) *[d): 1 P]*

W

Begründung: Für $x \to 0$ gilt $1/x \to \infty$, daher

$$\lim_{x\,\to\,0+} \tanh\tfrac{1}{x} \ = \ \lim_{y\,\to\,\infty} \tanh y \ = \ \lim_{y\,\to\,\infty} \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \ = \ 1\,.$$

- **Aufgabe 5.**

a) Formulieren Sie eine hinreichende Bedingung für Konvergenz einer alternierenden Reihe. *[a): 1.5 P.]*

Leibniz-Kriterium formulieren

b) f und g seien zwei gegebene differenzierbare Funktionen. Drücken Sie die Ableitung einer Funktion der Gestalt $\mathbf{w(x) := f(e^{g(x)})}$ mit Hilfe der Ableitungen von f und g aus. *[b): 1.5 P.]*

Zweimal Kettenregel anwenden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\, f\left(e^{g(x)}\right) &= f'\left(e^{g(x)}\right) \cdot \frac{d}{dx}\, e^{g(x)} \\ &= f'\left(e^{g(x)}\right) \cdot e^{g(x)} \cdot g'(x) \end{aligned}$$

c) Formulieren Sie den 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung und wenden Sie ihn auf die Stammfunktion $F(x)$ einer integrierbaren Funktion $f(x)$ an. Welche Aussage über f erhalten Sie daraus?

[c): 1.5 P.]

$$\exists\, \xi \in [a,b] \quad \text{mit} \quad F(b) - F(a) = F'(\xi)\,(b-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a) \quad \ldots \text{ 1. MWS der Integralrechnung}$$

d) Geben Sie zwei Formeln für den **Konvergenzradius** einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ an. *[d): 1.5 P.]*

Cauchy-Hadamard:

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(falls Limes existiert)