

ANALYSIS I FÜR TPH, VO (103.057)

Vorlesungsprüfung (Fr, 30.01.2015)

— keine elektronischen Hilfsmittel. keine schriftlichen Unterlagen. Arbeitszeit: 150 min. —

↑ FAMILIENNAME	↑ Vorname	↑ Studium / Matr.Nr.

1.	2.	3.	4.	5.	gesamt
					<div></div>
Punkte					max. 30

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein

Zur Beurteilung werden ausschließlich die in die entsprechenden

Kästchen

 eingetragenen Antworten herangezogen.

Machen Sie sich zunächst Notizen, und tragen Sie dann Ihre Lösung samt Zusammenfassung der wesentlichen Aspekte des Lösungsweges ein.

|| | ||| ||| || |

• **Aufgabe 1.**

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $\{a_n\}$, mit

$$a_n = \left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^n$$

[a): 2 P.]

Bitte präzise begründen.

b) Entscheiden Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cosh n}$$

konvergiert.

Falls dies zutrifft, geben Sie eine obere Schranke für den Wert der Reihe an.

[b): 2 P.]

c) Für welche $c \in \mathbb{R}$ hat der Limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - cx}{x^2}$$

einen endlichen Wert?

Geben Sie auch seinen Wert in Abhängigkeit von c an.

[c): 2 P.]

• **Aufgabe 2.**

- a) Führen Sie für die Funktion $f(x) = \arctan(\ln x)$ eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze.

Was passiert an der Stelle $x = 0$?

Hinweis: Sie finden einen Kandidaten für einen Wendepunkt. Um genau zu überprüfen, ob es sich wirklich um einen Wendepunkt handelt, schauen Sie sich die Funktion $f''(x)$ genau an. Was folgern Sie?¹ [a): 5 P.]

- b) Sei $g(x) := \cot\left((f(x) - f(1/x))/2\right)$ (f aus a)). Geben Sie für $g(x)$ eine möglichst einfache Darstellung an.

[b): 1 P.]

¹Nicht direkt im Kästchen rechnen. Schreiben Sie nur Ihr fertiges Ergebnis für $f''(x)$ an, und berechnen Sie $f'''(x)$ nicht.

• **Aufgabe 3.**

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int \arctan(1/x) \, dx$$

[a): 3 P.]

Hinweis: $\int 1 dx = x$

b) Stellen Sie den Wert des Integrals

$$\int x\sqrt{1+x} \, dx$$

(ohne Integrationskonstante) in Form eines Produktes

zweier Funktionen dar.

[b): 3 P.]

- **Aufgabe 4.** Man entscheide, ob die folgenden **Aussagen** zutreffen bzw. ob sie *wahr* (**w**) oder *falsch* (**f**) sind, bzw **in welchem Spezialfall sie zutreffen oder wie die Aussage ggf. zu modifizieren ist, damit sie zutrifft.**

Die Entscheidung für (**w**) oder (**f**) ist in jedem Fall mittels einer kurzen Argumentation (etwa ein Gegenbeispiel) bzw. durch explizites Zitat aus der Vorlesung bekannten Aussage zu begründen.

Ggf. beantworte man auch die zusätzlich gestellten Fragen.

- a) Sei $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^k$ mit $|q| < 1$. **Dann ist die Reihe**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergent. (w/f ?) [a): 1 P.]

- b) Die differenzierbaren Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien monoton wachsend.

Dann ist auch $f(x) \cdot g(x)$ monoton wachsend konvergent. (w/f ?)

[b): 1.5 P.]

- c) Sie f differenzierbar auf $[a, b]$. **Dann existiert $\xi \in [a, b]$ mit**

$$\int_0^1 f((1-u)a + ub) du = f'(\xi)$$

[c): 1.5 P.]

- d) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sei absolut konvergent. **Dann ist**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

die Taylorreihe einer unendlich oft

differenzierbaren Funktion. konvergent. (w/f ?)

Falls 'w': Was können Sie über den Konvergenzradius der Reihe aussagen?

[d): 2 P.]

- **Aufgabe 5.** Beantworten Sie die folgenden Fragen möglichst präzise.

a) Formulieren Sie das *Prinzip der vollständigen Induktion*

[a): 1.5 P.]

b) Formulieren Sie den *zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung*.

[b): 1.5 P.]

c) Geben Sie eine Funktion $h(x)$ an (in Abhängigkeit von den differenzierbaren Funktionen f und g), so dass gilt

$$\frac{d}{dx} \int_0^{g(x)} f'(\xi) d\xi = h'(x)$$

[c): 1.5 P.]

d) Formulieren Sie die Begriffe *punktweise Konvergenz* und *gleichmäßige Konvergenz* einer Funktionenreihe.

[d): 1.5 P.]