Lösungen zum Haupttest, am 15.Juni 2007

Gruppe A

1. Die Fläche F ist gegeben durch

$$z \;=\; x^2 + y, \qquad -2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1.$$

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$a(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

durch diese Fläche.

Lösung: Wählt man als Parameter x und y so erhält man:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad n = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -2x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Genau genommen macht es nur Sinn vom Betrag des Flusses durch die Fläche zu sprechen, da keine Orientierung angegeben ist. Die Wahl des Vorzeichens ist also beliebig.

$$\begin{aligned} \int_F a\,dS &= \int_{-2}^{2} dx \int_{-1}^{1} dy \begin{pmatrix} x^2+y \\ x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \int_{-2}^{2} dx \int_{-1}^{1} dy \left(-2x^3 - 2xy - x + y\right) = \int_{-2}^{2} dx \left(-4x^3 - 2x\right) = 0 \end{aligned}$$

Anmerkung: Integrale über um 0 symmetrische Intervalle von um 0 a ntisymmetrischen Funktionen wurden ohne weitere Rechnungen 0 gesetzt.

2. Berechnen sie den Fluss des Vektorfeldes

$$a(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz + e^{y^2} \\ y^2 + e^{-z^2} \\ yz + e^{\cos x} \end{pmatrix}$$

durch die obere Halbkugel, d.h.

$$F = \left\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 = 1 \wedge z > 0\right\} \cup \left\{(x,y,z)|z = 0 \wedge x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

unter Verwendung des Satzes von Gauß.

Lösung: Unter Verwendung von Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad \sqrt{|\det M|} = r^2\sin\vartheta$$

erhält man:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_F a\,dS &= \int\limits_V \mathrm{div} a\,dV \\
&= \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\,(r\cos\vartheta + 2r\sin\vartheta\sin\varphi + r\sin\vartheta\sin\varphi)\,r^2\sin\vartheta \\
&= \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta(2\pi\cdot r^3\sin\vartheta\cos\vartheta) \\
&= \int\limits_0^1 dr(r^3\pi\sin^2\vartheta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \int\limits_0^1 dr(r^3\pi) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

3. (a) Zeigen Sie, dass durch

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x < 0, \\ \frac{1}{4}e^{4x}, & x > 0, \end{cases}$$

eine Fundamentallösung der Differentialgleichung:

$$y'' - 4y' = f(x)$$

gegeben ist.

(b) Verwenden Sie diese Fundamentallösung um eine Partikulärlösung für $f(x) = e^{-2x}$ zu berechnen.

Lösung:

(a) Durch $c_1 + c_2e^{4x}$ ist die allgemeine homogene Lösung der Differentialgleichung gegeben, daher sind beide Seiten von U Lösungen dieser Gleichung.
Wegen $U(0) = \frac{1}{4}$ ist U offensichtlich stetig.
$U'(0^-) = 0$, $U'(0^+) = 1 \Rightarrow$ die Sprungbedingung ist erfüllt.

(b)

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi\,U(x-\xi)f(\xi) \\
&= \lim_{K\to\infty}\left(\int\limits_{-K}^{x} d\xi\,\frac{1}{4}e^{4x-4\xi}e^{-2\xi} + \int\limits_{x}^{K} d\xi\,\frac{1}{4}e^{-2\xi}\right) \\
&= \lim_{K\to\infty}\left(\int\limits_{-K}^{x} d\xi\,\frac{1}{4}e^{4x-6\xi} - \frac{1}{8}e^{-2\xi}\Big|_x^K\right) = \lim_{K\to\infty}\left(-\frac{1}{24}e^{4x-6\xi}\Big|_{-K}^{x} - \frac{1}{8}e^{-2\xi}\Big|_x^K\right) \\
&= \lim_{K\to\infty}\left(-\frac{1}{24}e^{-2x} + \underbrace{\frac{1}{24}e^{4x+K}}_{*} - \underbrace{\frac{1}{8}e^{-2K}}_{*} + \frac{1}{8}e^{-2x}\right) \\
&= -\frac{1}{24}e^{-2x} + \frac{1}{8}e^{-2x} = \frac{1}{12}e^{-2x}
\end{aligned}
$$

$(*)$ ist für alle K Lösung der homogenen Gleichung und liefert daher keinen Beitrag zur Partikulärlösung.

Gruppe B

1. Die Fläche F ist gegeben durch

$$y \;=\; x^2 + z^2, \qquad y \le 4.$$

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$a(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

durch diese Fläche.

Lösung: Wählen wir Polarkoordinaten für die xz-Ebene, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r^2 \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad n = \pm \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 2r \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ 0 \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 2r^2\cos\varphi \\ -r \\ 2r^2\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Genaugenommen macht es nur Sinn vom Betrag des Flusses durch die Fläche zu sprechen, da keine Orientierung angegeben ist. Die Wahl des Vorzechens ist also beliebig.

$$\begin{aligned}
\int_F a\,dS &= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2r^2\cos\varphi \\ -r \\ 2r^2\sin\varphi \end{pmatrix} \\
&= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \,(2r^3 \sin\varphi\cos\varphi - r^2\cos\varphi + 2r^4\sin\varphi) \\
&= \int_0^2 dr\,(r^3\sin^2\varphi - r^2\sin\varphi - 2r^4\cos\varphi)\big|_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

2. Berechnen sie den Fluss des Vektorfeldes

$$a(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy + \arctan z \\ yz + \sin x \\ xz + \cos y \end{pmatrix}$$

durch die Randfläche jenes Volumens, dass durch

$$z^2 = x - y, \quad y = 0, \quad y = 2, \quad z = -1, \quad z = 1 \quad \text{und} \quad x = 1 + y$$

begrenzt wird, unter Verwendung des Satzes von Gauß.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_F a\,dS &= \int_V \operatorname{div} a\,dV \\
&= \int_0^2 dy \int_{-1}^1 dz \int_{z^2+y}^{1+y} dx\,(y+z+x) = \int_0^2 dy \int_{-1}^1 dz \left(xy + xz + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{z^2+y}^{1+y} \\
&= \int_0^2 dy \int_{-1}^1 dz \left(y + y^2 + z + yz + \frac{1}{2} + y + \frac{y^2}{2} - z^2y - y^2 - z^3 - yz - \frac{z^4}{2} - z^2y - \frac{y^2}{2}\right) \\
&= \int_0^2 dy \int_{-1}^1 dz \left(\frac{1}{2} + 2y + z - 2z^2y - z^3 - \frac{z^4}{4}\right) = \int_0^2 dy \left(1 + 4y - \frac{4}{3}y - \frac{2}{5}\right) \\
&= \frac{6}{5} - \frac{16}{3} = -\frac{62}{15}
\end{aligned}$$

3. (a) Zeigen Sie, dass durch

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ xe^{2x}, & x > 0, \end{cases}$$

eine Fundamentallösung der Differentialgleichung:

$$y'' - 4y' + 4y = f(x)$$

gegeben ist.

(b) Verwenden Sie diese Fundamentallösung um eine Partikulärlösung für $f(x) = e^{-2x}$ zu berechnen.

Lösung:

(a) Durch $c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ ist die allgemeine homogene Lösung der Differentialgleichung gegeben, daher sind beide Seiten von U Lösungen dieser Gleichung.
Wegen $U(0) = 0$ ist U offensichtlich stetig.
$U'(0^-) = 0$, $U'(0^+) = 1 \Rightarrow$ die Sprungbedingung ist erfüllt.

(b)

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, U(x-\xi) f(\xi) \\ &= \lim_{K\to\infty} \left(\int_{-K}^{x} d\xi\, (x-\xi) e^{2x-2\xi} e^{-2\xi} + \int_{x}^{K} d\xi\, 0 \right) \\ &= \lim_{K\to\infty} \int_{-K}^{x} d\xi\, (x-\xi) e^{2x-4\xi} = \lim_{K\to\infty} \left(-\frac{1}{4} x e^{2x-4\xi}\Big|_{-K}^{x} + \frac{1}{4}\xi e^{2x-4\xi}\Big|_{-K}^{x} - \int_{-K}^{x} \frac{1}{4} e^{2x-4\xi} \right) \\ &= \lim_{K\to\infty} \left(-\frac{1}{4} x e^{-2x} + \underbrace{\frac{1}{4} x e^{2x+4K}}_{*} + \frac{1}{4} x e^{-2x} + \underbrace{\frac{K}{4} e^{2x+4K}}_{*} + \frac{1}{16} e^{-2x} - \underbrace{\frac{1}{16} e^{2x+4K}}_{*} \right) \\ &= \frac{1}{16} e^{-2x} \end{aligned}$$

$(*)$ ist für alle K Lösung der homogenen Gleichung und liefert daher keinen Beitrag zur Partikulärlösung.