Sammellösung zum 4. Kurztest, am 18.Juni 2007

Dass es diesmal nur eine Lösung gibt liegt nicht daran, dass ich die anderen nicht schreiben wollte, sondern daran dass der Lösungsweg bei allen vier Gruppen der gleiche ist und wirklich jeder Student in der Lage sein sollte die konkrete Problemstellung seiner Gruppe mit dem allgemeinen Problem zu assoziieren.

- Sei y eine fouriertransformierbare Funktion, die die Differentialgleichung

  $$ay'' + by' + cy = e^{-d|x|} \qquad (d > 0)$$

  erfüllt. Berechnen Sie die die Fouriertransformierte von y.

$$\begin{aligned}
\widehat{(ay'' + by' + cy)} &= \widehat{e^{-d|x|}} \\
a\widehat{y''} + b\widehat{y'} + c\widehat{y} &= \int_{-\infty}^{0} dx\, e^{dx} e^{-ikx} + \int_{0}^{\infty} dx\, e^{-dx} e^{-ikx} \\
a \cdot (-k^2\widehat{y}) + b \cdot (-ik\widehat{y}) + c\widehat{y} &= \frac{1}{d - ik} - \frac{1}{-d - ik} \\
\widehat{y}(c - ikb - k^2 a) &= \frac{2d}{d^2 + k^2} \\
\widehat{y} &= \frac{2d}{(d^2 + k^2)(c - ikb - k^2 a)}
\end{aligned}$$

Anmerkung: Da es reine Definitionssache ist, ob man die Fouriertransformation und die zugehörige Rücktransformation als

$$\widehat{y}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} y(x) \qquad\qquad y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \widehat{y}(k)$$

$$\widehat{y}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} y(x) \qquad\qquad y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx} \widehat{y}(k)$$

$$\widehat{y}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} y(x) \qquad\qquad y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \widehat{y}(k)$$

usw. definiert, habe ich andere Vorzeichen im Exponenten sowie unterschiedliche Vorfaktoren nicht als Fehler gewertet, auch wenn ich mir nicht sicher bin, wieviele der Betroffenen die entsprechende Formel für die Rücktransformation korrekt angegeben hätten.