Institut für Analysis und Scientific Computing SS 2008
TU Wien

PRAKTISCHE MATHEMATIK 2

2.Test am 7.April 2008

Gruppe A

- Gegeben sei das Parallelepiped welches durch die Flächen

$$\begin{array}{llll} \varepsilon_1: & 4x-y-4z = 1 & \varepsilon_3: \; -x-y-4z = -1 & \varepsilon_5: \; -2x+3y+4z = -2 \\ \varepsilon_2: & 4x-y-4z = 3 & \varepsilon_4: \; -x-y-4z = 2 & \varepsilon_6: \; -2x+3y+4z = 0 \end{array}$$

bestimmt ist, sowie das Vektorfeld

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2y + \ln(x^2+1) \\ e^{(-2x+3y+4z)} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss dieses Vektorfeldes mit Hilfe des gaußschen Divergenzsatzes und der Substitution:

$$\begin{array}{rclrcl} \xi &=& 4x-y-4z & x &=& \frac{1}{40}(8\xi - 8\eta) \\ \eta &=& -x-y-4z & y &=& \frac{1}{40}(12\xi + 8\eta + 20\zeta) \\ \zeta &=& -2x+3y+4z & z &=& \frac{1}{40}(-5\xi - 10\eta - 5\zeta) \end{array}$$

Hinweis: Besteht $\frac{d(x,y,z)}{d(\xi,\eta,\zeta)}$ *nur aus konstanten Einträgen, so gilt:*

$$\det \frac{d(x,y,z)}{d(\xi,\eta,\zeta)} = \frac{1}{\det \frac{d(\xi,\eta,\zeta)}{d(x,y,z)}}.$$

- $$\det \frac{d(\xi,\eta,\zeta)}{d(x,y,z)} = (-16-8+12) - (-8-48+4) = 40$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = 2 + 4e^{(-2x+3y+4z)} = 2 + 4e^{\zeta}$$

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div}\mathbf{a}\, d(\xi,\eta,\zeta) &= \int_1^3 \int_{-1}^2 \int_{-2}^0 (2+4e^{\zeta}) \cdot \frac{1}{40}\, d\zeta d\eta d\xi \\ &= \frac{3}{20} \int_{-2}^0 (2+4e^{\zeta})\, d\zeta = \frac{3}{5}(2-e^{-2}) \end{aligned}$$

Gruppe B

- Gegeben sei das Parallelepiped welches durch die Flächen

$$\begin{array}{llll} \varepsilon_1: & 4x-3y-3z = -2 & \varepsilon_3: \; 4x-y = 0 & \varepsilon_5: \; 5x+y+5z = -1 \\ \varepsilon_2: & 4x-3y-3z = 0 & \varepsilon_4: \; 4x-y = 3 & \varepsilon_6: \; 5x+1y+5z = 1 \end{array}$$

bestimmt ist, sowie das Vektorfeld

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4x+2y \\ \sin(4x-y) \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss dieses Vektorfeldes mit Hilfe des gaußschen Divergenzsatzes und der Substitution:

$$\begin{array}{rclcrcl} \xi & = & 4x - 3y - 3z & & x & = & \frac{1}{13}(-5\xi + 12\eta - 3\zeta) \\ \eta & = & 4x - y & & y & = & \frac{1}{13}(-20\xi + 35\eta - 12\zeta) \\ \zeta & = & 5x + y + 5z & & z & = & \frac{1}{13}(9\xi - 19\eta + 8\zeta) \end{array}$$

Hinweis: Besteht $\frac{d(x,y,z)}{d(\xi,\eta,\zeta)}$ *nur aus konstanten Einträgen, so gilt:*

$$\det \frac{d(x,y,z)}{d(\xi,\eta,\zeta)} = \frac{1}{\det \frac{d(\xi,\eta,\zeta)}{d(x,y,z)}}.$$

- $$\det \frac{d(\xi,\eta,\zeta}{d(x,y,z)} = -3(4+5) + 5(-4+12) = 13$$
  $$\mathrm{div}\mathbf{a} = 4 - \cos(4x - y) = 4 - \cos\eta$$

$$\begin{aligned} \int_V \mathrm{div}\mathbf{a}\, d(\xi,\eta,\zeta) &= \int_{-2}^{0}\int_{0}^{3}\int_{-1}^{1} (4 - \cos\eta) \cdot \frac{1}{13}\, d\zeta d\eta d\xi \\ &= \frac{4}{13}\int_0^3 (4 - \cos\eta)\, d\eta = \frac{4}{13}(12 - \sin 3) \end{aligned}$$

Gruppe C

- Gegeben sei das Parallelepiped welches durch die Flächen

$$\begin{array}{lrcrclrcrclrcr} \varepsilon_1: & -2x+3y-5z & = & -3 & \quad & \varepsilon_3: & -5x+y+5z & = & 1 & \quad & \varepsilon_5: & -2x+3y-3z & = & -1 \\ \varepsilon_2: & -2x+3y-5z & = & -1 & & \varepsilon_4: & -5x+y+5z & = & 2 & & \varepsilon_6: & -2x+3y-3z & = & 0 \end{array}$$

bestimmt ist, sowie das Vektorfeld

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sinh(-5x + y + 5z) \\ \cosh x \\ e^{x^2+y^2} + 2z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss dieses Vektorfeldes mit Hilfe des gaußschen Divergenzsatzes und der Substitution:

$$\begin{array}{rclcrcl} \xi & = & -2x + 3y - 5z & & x & = & \frac{1}{26}(-18\xi - 6\eta + 20\zeta) \\ \eta & = & -5x + y + 5z & & y & = & \frac{1}{26}(-25\xi - 4\eta + 35\zeta) \\ \zeta & = & -2x + 3y - 3z & & z & = & \frac{1}{26}(-13\xi + 13\zeta) \end{array}$$

Hinweis: Besteht $\frac{d(x,y,z)}{d(\xi,\eta,\zeta)}$ *nur aus konstanten Einträgen, so gilt:*

$$\det \frac{d(x,y,z)}{d(\xi,\eta,\zeta)} = \frac{1}{\det \frac{d(\xi,\eta,\zeta)}{d(x,y,z)}}.$$

- $$\det \frac{d(\xi,\eta,\zeta}{d(x,y,z)} = (6 - 30 + 75) - (10 - 30 + 45) = 26$$
  $$\mathrm{div}\mathbf{a} = -5\cosh(-5x + y + 5z) + 2 = 2 - 5\cosh\eta$$

$$
\begin{aligned}
\int_V \operatorname{div}\mathbf{a}\, d(\xi,\eta,\zeta) &= \int_{-3}^{-1}\int_{1}^{2}\int_{-1}^{0}(2-5\cosh\eta)\cdot\frac{1}{26}\,d\zeta d\eta d\xi \\
&= \frac{1}{13}\int_{1}^{2}(2-5\cosh\eta)\,d\eta = \frac{1}{13}(2-5\sinh(2)+5\sinh(1))
\end{aligned}
$$

Gruppe D

- Gegeben sei das Parallelepiped welches durch die Flächen

$$
\begin{array}{llll}
\varepsilon_1: & 3x+5y+3z = -2 & \varepsilon_3: \; 3x+5y-5z = 1 & \varepsilon_5: \; 2x+z = -2 \\
\varepsilon_2: & 3x+5y+3z = 2 & \varepsilon_4: \; 3x+5y-5z = 3 & \varepsilon_6: \; 2x+z = 0
\end{array}
$$

bestimmt ist, sowie das Vektorfeld

$$
\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4x \\ (2x+z)^3 \\ \sqrt{3x+5y-5z} \end{pmatrix}.
$$

Berechnen Sie den Fluss dieses Vektorfeldes mit Hilfe des gaußschen Divergenzsatzes und der Substitution:

$$
\begin{array}{lll}
\xi = 3x+5y+3z & & x = \frac{1}{80}(-5\xi+5\eta+40\zeta) \\
\eta = 3x+5y-5z & & y = \frac{1}{80}(13\xi+3\eta-24\zeta) \\
\zeta = 2x+z & & z = \frac{1}{80}(10\xi-10\eta)
\end{array}
$$

Hinweis: Besteht $\frac{d(x,y,z)}{d(\xi,\eta,\zeta)}$ *nur aus konstanten Einträgen, so gilt:*

$$
\det\frac{d(x,y,z)}{d(\xi,\eta,\zeta)} = \frac{1}{\det\frac{d(\xi,\eta,\zeta)}{d(x,y,z)}}.
$$

-

$$
\det\frac{d(\xi,\eta,\zeta}{d(x,y,z)} = 2(-25-15)+(15-15) = -80
$$

$$
\operatorname{div}\mathbf{a} = 4-\frac{5}{2}(3x+5y-5z)^{-\frac{1}{2}} = 4-\frac{5}{2}\eta^{-\frac{1}{2}}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_V \operatorname{div}\mathbf{a}\, d(\xi,\eta,\zeta) &= \int_{-2}^{2}\int_{1}^{3}\int_{-2}^{0}(4-\frac{5}{2}\eta^{-\frac{1}{2}})\cdot\frac{1}{80}\,d\zeta d\eta d\xi \\
&= \frac{1}{10}\int_{1}^{3}(4-\frac{5}{2}\eta^{-\frac{1}{2}})\,d\eta = \frac{1}{10}(13-5\sqrt{3})
\end{aligned}
$$