Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien

SS 2008

PRAKTISCHE MATHEMATIK 2

4.Test am 2.Juni 2008

Gruppe A-D

- Gegeben ist die Integralgleichung

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(c_1 y(\tau) e^{-a_1|t-\tau|} + c_2 e^{-a_2|\tau|} e^{-a_3|t-\tau|} \right) \, d\tau.$$

Führen sie eine Fouriertransformation der Gleichung durch, berechnen Sie $\hat{y}$ und geben Sie die daraus resultierende Integraldarstellung für y an (d.h. die Rücktransformation, nur ohne das Integral tatsächlich auszurechnen).

-

$$\int_{\mathbb{R}} f(\xi) g(x-\xi) \, d\xi = f(x) * g(x) \qquad \widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{e^{-a|x|}} &= \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-ikx} \, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-ikx} \, dx \\
&= \frac{1}{a-ik} e^{(a-ik)x} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-a-ik} e^{(-a-ik)x} \Big|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{a-ik} + \frac{1}{a+ik} = \frac{2a}{a^2+k^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_1 y(x) * e^{-a_1|x|} + c_2 e^{-a_2|x|} * e^{-a_3|x|} \\
\hat{y}(k) &= c_1 \hat{y}(k) \cdot \frac{2a_1}{a_1^2+k^2} + c_2 \frac{2a_2}{a_2^2+k^2} \frac{2a_3}{a_3^2+k^2} \\
\hat{y}(k) &= c_2 \frac{4a_2a_3}{(a_2^2+k^2)(a_3^2+k^2)} \left(1 - c_1 \frac{2a_1}{a_1^2+k^2} \right)^{-1} \\
&= c_2 \frac{4a_2a_3(a_1^2+k^2)}{(a_2^2+k^2)(a_3^2+k^2)(a_1^2+k^2-2a_1c_1)} \\
y(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} c_2 \frac{4a_2a_3(a_1^2+k^2)}{(a_2^2+k^2)(a_3^2+k^2)(a_1^2+k^2-2a_1c_1)} e^{ikx} \, dk
\end{aligned}$$

Anmerkung: Wer daraus y berechnen will, braucht lediglich eine Partialbruchzerlegung des Integranden zu machen.