Lösungen zum 1. Test PMII von 3. Mai 2011.

Der Lösungsweg wird anhand der Aufgaben der Gruppe A erklärt. Die Ergebnisse für die Gruppe B sind angegeben.

1. (a) Bestimmen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes

$$\mathbf{a}(x,y) = (\sin(\sqrt{x-1}), xy)$$

längs der Kurve $x = 1+t^2, y = t^3, t \in [0,1]$.

(b) Beweisen Sie, dass es sich bei dem folgenden Vektorfeld $\mathbf{a}(x,y,z)$ auf dem Gebiet $G = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : y > 0, z > 0\}$ um ein Gradientenfeld handelt. Bestimmen Sie anschließend das Potential von

$$\mathbf{a}(x,y,z) = (\ln(zy), \frac{x}{y}, \beta\frac{x}{z}).$$

Für welchen Wert von β existiert ein Potential für $\mathbf{a}$?

Lösung (a)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathbf{a}\left(1+t^2, t^3\right) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} dt &= \\
\int_0^1 (\sin(t), (1+t^2)t^3) \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt &= \\
\int_0^1 2t\sin(t)dt + 3t^2(t^3+t^5)dt &= \\
\int_0^1 2t\sin(t)dt + \int_0^1 (3t^5+3t^7)dt &= \\
-2t\cos(t)\Big|_0^1 + \int_0^1 2\cos(t)dt + \frac{3}{6} + \frac{3}{8} &= \\
-2\cos(1) + 2\sin(1) + \frac{7}{8}
\end{aligned}$$

Lösung (b)

- Das vorliegende Gebiet G ist einfach zusammenhängend.
- $\nabla \times \mathbf{a} = 0$?

$$\nabla \times \mathbf{a} = \left(0-0, \frac{1}{z} - \frac{\beta}{z}, \frac{1}{y} - \frac{1}{y}\right)$$

$$\text{für } \beta = 1 \text{ folgt } \mathbf{a} = \nabla\Theta$$

- Potential:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Theta}{\partial x} = \ln(zy) \Rightarrow \Theta(x,y,z) = \ln(zy)x + c(y,z) \\
&\frac{\partial\Theta}{\partial y} = \frac{x}{y} + \frac{\partial}{\partial y}c(y,z) = \frac{x}{y} \Rightarrow c(y,z) = c(z) \Rightarrow \Theta(x,y,z) = \ln(zy)x + c(z) \\
&\frac{\partial\Theta}{\partial z} = \frac{x}{z} + c'(z) = \frac{x}{z} \Rightarrow c'(z) = 0 \Rightarrow \Theta = \ln(zy)x + c
\end{aligned}$$

Lösung Gruppe B:

(a) $-2\sin(1) - 2\cos(1) + \frac{17}{8}$
(b) $\alpha = 4$; $\Theta = x^2\ln(yz) + c$

2. (a) Bestimmen Sie eine Fundamentallösung des Differentialoperators

$$Lu = u'' + 3u'.$$

(b) Damit berechne man eine Partikulärlösung der Differentialgleichung $Lu = f(x)$ mit $f(x) = e^{2x}$.

Hinweis: Um die Lösung von $Lu(x) = 0$, $x \neq 0$ zu finden, machen Sie den Ansatz $u(x) = e^{\lambda x}$.

Lösung:

Die Eigenwerte dieser linearen Differentialgleichung 2. Ordnung sind die Nullstellen von $\lambda^2 + 3\lambda = 0$, sprich $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -3$. Als Lösung erhält man

$$U(x) = A + Be^{-3x}$$

Ein stückweiser Ansatz für $x < 0$ und $x > 0$ liefert

$$U(x) = \begin{cases} A_- + B_- e^{-3x}, & x < 0 \\ A_+ + B_+ e^{-3x}, & x > 0 \end{cases}$$

Unter der Voraussetzung, dass U stetig sein soll und U' bei 0 einen Sprung der Höhe 1 hat, folgt

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3x}, & x > 0 \end{cases}$$

Die Partikulärlösung folgt aus:

$$\begin{aligned} u_p(x) = U * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x-\zeta) f(\zeta) d\zeta &= \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-3(x-\zeta)} \right) e^{2\zeta} d\zeta = \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{3} e^{2\zeta} d\zeta - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{3} e^{-3x+3\zeta} e^{2\zeta} d\zeta = \\ &= \frac{1}{6} e^{2x} - \frac{1}{3} e^{-3x} \int_{-\infty}^{x} e^{5\zeta} d\zeta = \frac{1}{6} e^{2x} - \frac{1}{15} e^{-3x} e^{5x} = \frac{1}{10} e^{2x} \end{aligned}$$

Insgesamt folgt dann $u = u_h + u_p$

Lösung Gruppe B:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4x}, & x > 0 \end{cases}$$

$u_p(x) = \frac{1}{5} e^x$

3. Man verifiziere den Satz von Stokes anhand des Flächenintegrals des Vektorfeldes $\mathbf{a}(x,y,z) = (3x^2 - 7y, 4(z + y^2), -5y^2 - x)$ und der Fläche $z = x^2 + y^2 - 9,\ z \leq 0$.

Hinweis: Beachten Sie die Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen über der Periode $[0, 2\pi]$ *und verwenden Sie* $\sin^2(\varphi) = \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}$*, sowie die Tatsache, dass* $\int_0^{2\pi} \sin^i(\varphi)\cos^j(\varphi) = 0$ *gilt, falls* $i + j$ *ungerade ist.*
Beachten Sie auch die Orientierung des Normalvektors, beispielsweise im Punkt $P_1 = (0, -1, -8)^T$ *und die sich daraus ergebende Orientierung auf der Randkurve.*

Lösung:

Wir müssen also folgende Gleichheit zeigen: $\int_{\partial F} a \cdot dr = \int_F (\nabla \times a) \cdot dS$

`RHS:`
$a(x,y,z) = (3x^2 - 7y, 4(z + y^2), -5y^2 - x) \Rightarrow \nabla \times a = (-10y - 4, 1, 7)$

$$\text{Fläche:} \quad \begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \quad \varphi \in [0, 2\pi] \\ y &= r\sin(\varphi) \quad r \in [0, 3] \\ z &= r^2 - 9 \end{aligned}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial r} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2\cos(\varphi) \\ -2r^2\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix}$$

Kontrolle ob $\mathbf{n}$ in die richtige Richtung zeigt:

$$r = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{n}(P_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{falsche Richtung!} \Rightarrow \mathbf{n} \mapsto -\mathbf{n}$$

$$\int_F (\nabla \times a) \cdot dS = \int_{x^2+y^2 \leq 9} (\nabla \times a) \cdot \mathbf{n}(x,y) d(x,y) =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 (-10r\sin(\varphi) - 4, 1, 7) \begin{pmatrix} 2r^2\cos(\varphi) \\ 2r^2\sin(\varphi) \\ -r \end{pmatrix} dr d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 - \underbrace{20r^3\sin(\varphi)\cos(\varphi)}_{=0} - \underbrace{8r^2\cos(\varphi)}_{=0} + \underbrace{2r^2\sin(\varphi)}_{=0} - 7r\ dr d\varphi = 2\pi \int_0^3 -7r\ dr = \underline{-63\pi}$$

`LHS:`
$\partial F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 9\}$ und $z = 0$

$$\begin{aligned} x &= 3\cos(\varphi) & dx &= -3\sin(\varphi)\ d\varphi, \quad \varphi \in [2\pi, 0] \text{ Achtung! Das ist der positive Umlaufsinn auf } \partial F\ ! \\ y &= 3\sin(\varphi) & dy &= 3\cos(\varphi)\ d\varphi \\ z &= 0 & dz &= 0 \end{aligned}$$

$$\int_{\partial F} a \cdot dr = \int_{2\pi}^{0} a(r(\varphi)) \cdot r'(\varphi)\ d\varphi =$$

$$\int_{2\pi}^{0} (27\cos(\varphi)^2 - 21\sin(\varphi), 36\sin^2(\varphi), -45\sin^2(\varphi) - 3\cos(\varphi)) \begin{pmatrix} -3\sin(\varphi) \\ 3\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi =$$

$$\int_{2\pi}^{0} -\underbrace{81\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)}_{=0} + \underbrace{63\sin^2(\varphi)}_{-63\pi\ (*)} + \underbrace{108\sin^2(\varphi)\cos(\varphi)}_{=0} d\varphi = \underline{-63\pi}$$

Damit ist der Satz verifiziert.

$(*)$

$$\int_{2\pi}^{0} 63\sin^2(\varphi) d\varphi = 63 \int_{2\pi}^{0} \frac{1-\cos(2\varphi)}{2} d\varphi = \frac{63}{2} \int_{2\pi}^{0} 1\ d\varphi - \underbrace{\int_{2\pi}^{0} cos(2\varphi) d\varphi}_{=0} = -\frac{63}{2} \cdot 2\pi = -63\pi$$

Lösung Gruppe B:

$\nabla \times a = (-6y - 3, 1, 4)$
$\int_{\partial F} a \cdot dr = \int_F (\nabla \times a) \cdot dS = 36\pi$