1. Man bestimme mit Hilfe der Fouriertransformation die Lösung des Anfangswertproblems für $u = u(x,t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -5\frac{\partial u}{\partial x}, t > 0, -\infty < x < \infty,$$
$$u(x,0) = xe^{-6|x|}.$$

Hinweis: Es gilt zu beachten: $u(\sigma(t,x),t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{u(k,t)}e^{ik\sigma(t,x)}dk$.
Des Weiteren gilt für $f(x) = xe^{-a|x|}$ *und* $a > 0$: $\hat{f}(x) = \frac{4ika}{-k^4-2k^2a^2-a^4}$

Lösung:
Das transformierte Problem für $\hat{u} = \hat{u}(k,t)$ lautet (siehe 4.27):

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -5(ik)\hat{u}$$

Daraus folgt die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\hat{u}(k,t) = c(k)e^{-5ikt}$$

Bestimmung des unbekannten Terms $c(k)$:

$$\begin{aligned}
c(k) = \hat{u}(k,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-ikx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-6|x|}e^{-ikx}dx \\
&= \frac{24ik}{-k^4 - 72k^2 - 1296}
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\hat{u}(k,t) = \frac{24ik}{-k^4-72k^2-1296}e^{-5ikt}$. Als letzter Schritt muss $\hat{u}(k,t)$ zurücktransformiert werden:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{24ik}{-k^4 - 72k^2 - 1296}e^{-5ikt}e^{ikx}dk \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{24ik}{-k^4 - 72k^2 - 1296}e^{ik(-5t+x)}dk \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{24ik}{-k^4 - 72k^2 - 1296}e^{ik\sigma(t,x)}dk \\
&= \sigma(t,x)e^{-6|\sigma(t,x)|} = (-5t + x)e^{-6|-5t+x|}
\end{aligned}$$

Lösung B: $\hat{u}(k,t) = \frac{16ik}{-k^4-32k^2-256}e^{-4ikt}$, $u(x,t) = (-4t + x)e^{-5|-4t+x|}$

2. Finden Sie jene Funktion $y(x)$, die das Integral

$$I[y] = \int_1^2 \left(x^2 - 5yy' + 2y^2 + \frac{1}{3}x^2 y'^2 \right)\ dx$$

unter den Nebenbedingungen $y(1) = y(2) = 0$ und $\int_1^2 y(x)\ dx = \frac{17}{21}$ minimiert.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = Cx^n$, um zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Euler-Lagrange-Gleichung zu finden, und setzen Sie die Partikulärlösung als $y(x) = C$ an.

Lösung:

$$h(x, y, y') = x^2 - 5yy' + 2y^2 + \frac{1}{3}x^2 y'^2 + \lambda y$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) = \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\Rightarrow -5y' + \frac{4}{3}xy' + \frac{2}{3}x^2 y'' \stackrel{!}{=} -5y' + 4y + \lambda$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}xy' + \frac{2}{3}x^2 y'' = 4y + \lambda$$

homogene Lösung: $y_h = Cx^n$

$$\frac{4}{3}xCnx^{n-1} + \frac{2}{3}x^2 Cn(n-1)x^{n-2} = 4Cx^n$$

$$\frac{4}{3}n + \frac{2}{3}n^2 - \frac{2}{3}n = 4$$

$$\Rightarrow n_1 = -3, n_2 = 2$$

inhomogene Lösung: $y_p = C$

$$0 = 4C + \lambda \Rightarrow C = -\frac{\lambda}{4}$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 x^{-3} + C_2 x^2 - \frac{\lambda}{4}$$

Einsetzen in Nebenbedingungen:

$$y(1) = C_1 + C_2 - \frac{\lambda}{4} = 0$$

$$y(2) = \frac{1}{8}C_1 + 4C_2 - \frac{\lambda}{4} = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{24}{7}C_2, \lambda = \frac{124}{7}C_2$$

$$\int_1^2 y(x)\ dx = \int_1^2 \frac{24}{7}C_2 x^{-3} + C_2 x^2 - \frac{31}{7}C_2\ dx \stackrel{!}{=} \frac{347}{84}$$

$$\Rightarrow -\frac{17}{21}C_2 = \frac{17}{21}$$

$$\Rightarrow C_2 = -1, C_1 = -\frac{24}{7}, \lambda = -\frac{124}{7}$$

$$y(x) = -\frac{24}{7}x^{-3} - x^2 + \frac{31}{7}$$

Lösung Gruppe B:

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^2 - \frac{\lambda}{16} = -6x - 8x^{-2} + 14$$

3. (a) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen existieren, indem Sie zeigen, dass das Integral von $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx$ (bzw. $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\ dx$) endlich ist.

   (i) $f(x) = e^{-\frac{|x|}{a}}, a > 0$

   (ii) $g(x) = 1$ für $x \in [c, d]$ und $g(x) = 0$ wenn $x \in \mathbb{R} \setminus [c, d]$.

   Existiert auch die Fouriertransformierte von der Funktion $f * g(x)$? Zeigen bzw. begründen Sie ihre Aussagen.

   (b) Sei eine Funktion gegeben durch: $f(x) = c \cdot \max(1 - |x|, 0), c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

   (i) $f(x) = c \cdot (1 - |x|)$, für $x \in (-1, 1)$

   (ii) $f(x) = 0$, sonst

   Berechnen Sie die Fouriertransformierte von f(x).

Bonuspunkt: Zeigen Sie, dass die Faltung bilinear ist. Die Bilinearität wird auch als Distributivität in beiden Argumenten bezeichnet, das heißt es gilt folgende Gleichheit für $a, b \in \mathbb{R}$ und für die Funktionen f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 zu zeigen:

$$(af_1 + bf_2) * g(x) = a\,(f_1 * g(x)) + b\,(f_2 * g(x)) \tag{1}$$

$$f(x) * (ag_1 + bg_2) = a\,(f * g_1(x)) + b\,(f * g_2(x)) \tag{2}$$

Lösung:
zu (a):
$\int_{x\in\mathbb{R}} |e^{-\frac{|x|}{a}}|\ dx = \int_{x\in\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|}{a}}\ dx = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{a}} + \int_{-\infty}^0 e^{\frac{x}{a}}\ dx = 2a$
$\int_{x\in\mathbb{R}} g(x)\ dx = \int_c^d 1\ dx = d - c$
Somit sind beide Integrale wohldefiniert und es existieren jeweils die Fouriertransformierten. Es existiert auch die Fouriertransformierte von der Funktion $f * g$, da $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g} < \infty$
Gruppe A: $a = 2\pi \to F(x) = 4\pi$; $[c, d] = [2, 3] \to G(x) = 1$
Gruppe B: $a = 1/2 \to F(x) = 1$; $[c, d] = [0, \pi] \to G(x) = \pi$

zu (b):
$1 - |x|$ ist für $|x| \geq 1$ Null oder negativ und für $x \in (-1, 1)$ positiv, da wir das Maximum von $(1 - |x|, 0)$ nehmen, ist (i) und (ii) schon gezeigt.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= c\int_{x\in(-1,1)} (1 - |x|) \cdot e^{-ikx}\ dx = c\int_0^1 (1 - x)(e^{ikx} + e^{-ikx})\ dx \\
&= c\frac{(1 - y)(e^{ikx} - e^{-ikx})}{ik}|_0^1 + c\int_0^1 \frac{(e^{ikx} - e^{-ikx})}{ik}\ dx \\
&= c\frac{(e^{ikx} + e^{-ikx})}{(ik)^2})|_0^1 = -c\frac{2}{k^2}(\cos(k) - 1)
\end{aligned}$$

Gruppe A: $c = 23$
Gruppe B: $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Bonusfrage:

$$\begin{aligned}
(af_1 + bf_2) * g(x) &= \int_{y\in\mathbb{R}} (af_1(x - y) + bf_2(x - y)) \cdot g(y)\ dy \\
&= \int_{y\in\mathbb{R}} af_1(x - y) \cdot g(y)\ dy + \int_{y\in\mathbb{R}} bf_2(x - y) \cdot g(y)\ dy \\
&= a\,(f * g_1(x)) + b\,(f * g_2(x))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(x) * (ag_1 + bg_2) &= \int_{y\in\mathbb{R}} f(x-y) \cdot (ag_1(y) + bg_2(y))\ dy \\
&= \int_{y\in\mathbb{R}} af(x-y) \cdot g_1(y)\ dy + \int_{y\in\mathbb{R}} bf(x-y) \cdot g_2(y)\ dy \\
&= a\left(f * g_1(x)\right) + b\left(f * g_2(x)\right)
\end{aligned}
$$