Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 2 Gruppe A (Fr, 20.06.2014) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie ohne Verwendung von b), dass die Fourier- Transformierte der Funktion $f(x) = (1+x)e^{-|x|}$ existiert, d.h., zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ gilt.

Hinweis: $\displaystyle\int xe^{ax} dx = \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}$, *für* $a = const.$

Existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$, so existiert die Fourier- Transformierte $\hat{f}$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |(1+x)e^{-|x|}|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |1+x|e^{-|x|}\, dx = \\
&= \int_{-\infty}^{-1} -(1+x)e^{x}\, dx + \int_{-1}^{0} (1+x)e^{x}\, dx + \int_{0}^{\infty} (1+x)e^{-x}\, dx = \\
&= -(1+x)e^{x}\Big|_{-\infty}^{-1} + \int_{-\infty}^{-1} e^{x}\, dx + (1+x)e^{x}\Big|_{-1}^{0} - \\
&- \int_{-1}^{0} e^{x}\, dx + (-(1+x))e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = \\
&= e^{x}\Big|_{-\infty}^{-1} + 1 - e^{x}\Big|_{-1}^{0} + 1 + (-e^{-x})\Big|_{0}^{\infty} = 2 + 2e^{-1}.
\end{aligned}$$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Fourier- Transformierte der Funktion $f(x) = (1+x)e^{-|x|}$.

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+x)e^{-|x|}e^{-ikx}\,dx = \\
&= \int_{-\infty}^{0} (1+x)e^{x(1-ik)}\,dx + \int_{0}^{\infty} (1+x)e^{-x(1+ik)}\,dx = \\
&= (1+x)\frac{e^{x(1-ik)}}{1-ik}\bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1-ik}\int_{-\infty}^{0} e^{x(1-ik)}\,dx - \\
&- (1+x)\frac{e^{-x(1+ik)}}{1+ik}\bigg|_{0}^{\infty} + \frac{1}{1+ik}\int_{0}^{\infty} e^{-x(1+ik)}\,dx = \\
&= \frac{1}{1-ik} - \frac{1}{(1-ik)^2}e^{x(1-ik)}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{1+ik} - \frac{1}{(1+ik)^2}e^{-x(1+ik)}\bigg|_{0}^{\infty} = \\
&= \frac{1}{1-ik} - \frac{1}{(1-ik)^2} + \frac{1}{1+ik} + \frac{1}{(1+ik)^2}.
\end{aligned}
$$

Also:

$$\hat{f}(k) = \frac{2(1-2ki+k^2)}{(1+k^2)^2}$$

c) (2 Punkte) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ist - bis auf einen Vorfaktor - invariant unter Fourier- Transformation, d.h. es gilt $\hat{f}(k) = ae^{-k^2/2}$, mit einer Konstante a.

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2}\, dt = \sqrt{2\pi}$.

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(2ikx+x^2)}\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2-\frac{1}{2}k^2}\, dx = \\ &= e^{-\frac{1}{2}k^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2}\, dx}_{=\sqrt{2\pi}} = \\ &= \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}k^2}.\end{aligned}$$

- **Aufgabe 2.**

a) (1 Punkt) Geben sie die Euler-Lagrange-Gleichung für folgendes Problem an

$$I[y] = \int_{-2\pi}^{3\pi} -2y^2 - 16y + 5yy' + 8(y')^2 \to \min \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \\ -4y - 16 + 5y' &= \frac{\partial}{\partial x}(5y + 16y') \\ -4y - 16 + 5y' &= 5y' + 16y'' \\ y'' &= -\frac{1}{4}y - 1 \end{aligned}$$

b) (5 Punkte) Finden Sie die reele Kurve $y(x)$ mit $y(-2\pi) = 1$, $y(3\pi) = 3$, die (1) minimiert
Hinweis:
$\cos(2k\pi) = \sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$,
$\cos(2k\pi + \pi) = \sin(2k\pi + \frac{3\pi}{2}) = -1$ und
$\sin(k\pi) = \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Die allgemeine reele Lösung von $y'' = -\frac{1}{4}y$ ist

$$y_h = a\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Eine partikulär Lösung von $y'' = -\frac{1}{4}y - 1$ ergibt sich mit dem Ansatz $y_p(x) = c$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{4}c - 1 \\ c &= -4 \end{aligned}$$

Daraus folgt $y(x) = a\cos(\frac{1}{2}x) + b\sin(\frac{1}{2}x) - 4$.

Zur Berechnung der Konstanten benötigt man den Hinweis und die Randbedingungen $x = -2\pi$

$$\begin{aligned} 1 = y(-2\pi) = a\cos(-\pi) + b\sin(-\pi) - 4 &= -a - 4 \\ a &= -5 \end{aligned}$$

und $x = 3\pi$

$$\begin{aligned} 3 = y(3\pi) = a\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + b\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) - 4 &= -b - 4 \\ b &= -7 \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$y(x) = -5\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 7\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 4$$

- **Aufgabe 3.**

a) (5 Punkte) Lösen sie das Randwertproblem für $u = u(x,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2$$
$$u(0,t) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(2,t) = -1$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) + 8\sin\left(\frac{11\pi x}{4}\right) - x + 1.$$

Um eine symmetrische Problemstellung zu erhalten benötigen wir die Transformation

$$v(x,t) = u(x,t) + kx + d$$

mit $v(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(2,t) = 0$.
Es ergeben sich folgende Gleichungen zum Lösen der Unbekannten

$$\begin{aligned}
0 &= v(0,t) = u(0,t) + b = 1 + b \quad \Rightarrow d = -1 \\
0 &= \frac{\partial v}{\partial x}(2,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2,t) + k = -1 + k \quad \Rightarrow k = 1 \\
&\Rightarrow \ v(x,t) = u(x,t) + x - 1 \\
&\Rightarrow \ v(x,0) = u(x,0) + x - 1 = \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) + 8\sin\left(\frac{11\pi x}{4}\right)
\end{aligned}$$

Wir verwenden den Ansatz $v(x,t) = \Psi(x)T(t)$

$$\begin{aligned}
\Psi(x)T'(t) &= 2\Psi''(x)T(t) \\
\frac{T'(t)}{T(t)} &= 2\frac{\Psi''(x)}{\Psi(x)} = \lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi''(x) = \frac{\lambda}{2}\Psi(x), \qquad \Psi(0) = \Psi'(2) = 0 \\
\Rightarrow \lambda < 0, \quad \Psi(x) = a\cos(\sqrt{-\lambda/2}x) + b\sin(\sqrt{-\lambda/2}x) \\
0 = \Psi(0) = a \Rightarrow a = 0, \ \Psi(x) = b\sin(\sqrt{-\lambda/2}x) \\
0 = \Psi'(2) = b\sqrt{-\lambda_k/2}\cos(2\sqrt{-\lambda_k/2}) \overset{b\neq 0}{\Leftrightarrow} 2\sqrt{-\lambda_k/2} = \pi\,(k - 1/2)\,, \ k \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow -\lambda_k = 2\,(\pi\,(k-1/2)\,/2)^{\frac{1}{2}}\,, \ k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

für $T(t)$ gilt

$$T_j'(t) = \lambda_j T_j(t) \ \Rightarrow \ T_j(t) = e^{\lambda_j t}T_j(0)$$

daher gilt

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(0) e^{\lambda_j t} \sin\left(\pi\left(j - 1/2\right) x/2\right)$$

Zur Berechnung der Konstanten verwenden wir $v(x,0)$.

$$\begin{aligned}
v(x,0) &= \sum_{j=1}^{\infty} T_j(0) \sin\left(\pi\left(j-1/2\right)x/2\right) \\
\sin\left(\frac{2-1/2\pi x}{2}\right) + 8\sin\left(\frac{6-1/2\pi x}{2}\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} T_j(0) \sin\left(\pi\left(j-1/2\right)x/2\right) \\
&\Rightarrow \; T_2 = 1, \quad T_6 = 8
\end{aligned}$$

Alternativ zeigen sie

$$\int_0^2 \sin\left(\pi\left(k-1/2\right)x/2\right) \sin\left(\pi\left(j-1/2\right)x/2\right) dx = \delta_{kj}$$

$v(x,0)$ und die Löesung bei $t=0$ werden dann mit $\sin\left(\pi\left(k-1/2\right)x/2\right)$ multipliziert und aufintegriert.

$$\begin{aligned}
& v(x,0) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(0)\sin\left(\pi\left(j-1/2\right)x/2\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall j \in \mathbb{N}: \quad \int_0^2 v(x,0)\sin\left(\pi\left(k-1/2\right)x/2\right) dx \\
& = \int_0^2 \sum_{j=1}^{\infty} T_j(0)\sin\left(\pi\left(j-1/2\right)x/2\right)\sin\left(\pi\left(k-1/2\right)x/2\right) dx \\
\Leftrightarrow \quad & \int_0^2 v(x,0)\sin\left(\pi\left(k-1/2\right)x/2\right) dx = T_k(0) \\
\Rightarrow \quad & T_2 = 1, \quad T_6 = 8
\end{aligned}$$

und $T_k = 0$, $k \neq 2, 6$. Die Lösung ergibt sich daher, für λ_k wie oben definiert, aus

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= e^{\lambda_2 t}\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) + 8e^{\lambda_6 t}\sin\left(\frac{11\pi x}{4}\right) \\
u(x,t) &= e^{\lambda_2 t}\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) + 8e^{\lambda_6 t}\sin\left(\frac{11\pi x}{4}\right) - x + 1
\end{aligned}$$

b) (1 Punkt) Sei $u(x,t)$ die Lösung des Randwertproblems aus a). Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

Da alle $\lambda_k < 0$ sind, gilt $\lim_{t\to\infty} v(x,t) = 0$, $0 < x < 2$ und somit

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = -x + 1$$