Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 1 Gruppe A (Mo, 28.04.2014) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textit{Kästchen}}$ eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie das transversale Kurvenintegral des Vektorfelds

$$a(x,y) = \begin{pmatrix} \cos((y-2)^{1/3}) \\ (x-3)\,y \end{pmatrix}$$

längs der Kurve $x = 3 - 2t^2$, $y = t^3 + 2$, $\quad t \in [0,1]$.

Hinweis: $\int t^2 \cos t\, dt = t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t$.

Das transversale Kurvenintegral berechnet man nach der folgenden Formel:

$$\int_0^1 a(x(t), y(t)) \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} dt.$$

Setzten wir $x(t)$ und $y(t)$ in das Vektorfeld und den Tangentialvektor ein, so erhalten wir

$$a(x(t), y(t)) = (\cos(t), -2t^5 - 4t^2), \quad \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 4t \end{pmatrix},$$

also insgesamt

$$\int_0^1 (\cos(t), -2t^5 - 4t^2) \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 4t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (3t^2 \cos(t) - 8t^6 - 16t^3) dt.$$

Nun gilt laut Hinweis

$$\int_0^1 3t^2 \cos(t) dt \quad = \quad 3[t^2 \sin(t) + 2t \cos(t) - 2 \sin(t)]\big|_0^1 = 6\cos(1) - 3\sin(1).$$

Insgesamt erhalten wir,

$$\int_0^1 3t^2 \cos(t) - 8t^6 - 16t^3 dt = 6\cos(1) - 3\sin(1) - \frac{8}{7} - 4.$$

b) (3 Punkte) Gegeben sei das Vektorfeld

$$a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \longmapsto \left(ye^{xy} + \ln z, xe^{xy} - 2yz, \frac{x}{z} - y^2 + z^3\right)^T.$$

Zeigen Sie, dass es für a ein Potential gibt. Berechnen Sie anschließend das Potential.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Weiters gilt,

$$\operatorname{rot} a = \nabla \times a = \begin{pmatrix} \partial_2 a_3 - \partial_3 a_2 \\ \partial_3 a_1 - \partial_1 a_3 \\ \partial_1 a_2 - \partial_2 a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - (-2y) \\ \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \\ e^{xy}(1 + xy) - e^{xy}(1 + xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist a ein Gradientenfeld und es existiert ein Potential.

Für das Potential Φ gilt: $a = \nabla \Phi$.

Zur Berechnung des Potentials integrieren wir a_1 nach x und erhalten

$$\Phi(x, y, z) = e^{xy} + \ln(z)x + c(y, z).$$

Es muss aber auch $\Phi_y = a_2$ gelten,

$$\Phi_y(x, y, z) = xe^{xy} + c_y(y, z) \stackrel{!}{=} xe^{xy} - 2yz.$$

Also $c_y(y, z) = -2yz$ und somit $c(y, z) = -y^2 z + c(z)$.
Zusätzlich muss $\Phi_z = a_3$ sein und wir erhalten

$$\Phi_z(x, y, z) = \frac{x}{z} - y^2 + c'(z) \stackrel{!}{=} \frac{x}{z} - y^2 + z^3.$$

Also $c'(z) = z^3$ und somit $c(z) = \frac{z^4}{4} + c$.

Somit lautet das Potential

$$\Phi(x, y, z) = e^{xy} + \ln(z)x - y^2 z + \frac{z^4}{4} + c.$$

- **Aufgabe 2.**

(6 Punkte) Sei $F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2z,\ \ z \leq 2\}$ der beschränkte Teil des Paraboloids $2z = x^2 + y^2$ mit dem Rand $\partial F := \{(x, y, 2) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4\}$. Gegeben sei ferner das Vektorfeld

$$a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad a(x, y, z) = (3y, -zx, z^2 y)^T.$$

Berechnen Sie die beiden Seiten des Satzes von Stokes.

Hinweis: $\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}(t + \cos t \sin t), \quad \int \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}(t - \cos t \sin t)$.

Es gilt also folgende Gleichheit zu zeigen: $\int_{\partial F} a \cdot dr = \int_F (\nabla \times a) \cdot dS$.

Parametrisierung der Fläche F durch Polarkoordinaten

$$F(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r^2/2 \end{pmatrix}, \ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \ \ 0 \leq r \leq 2.$$

Der Normalvektor,

$$n(r, \varphi) := \frac{\partial F}{\partial r} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r^2\cos\varphi \\ -r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

Schaut man sich die Orientierung des Normalvektors an, z.B., an der Stelle $\varphi = \pi/2$ und $r = 1$, so stellt man fest, dass $n(1, \pi/2) = (0, -1, 1)^T$ gilt, also zeigt der Normalvektor in das Innere des Paraboloids. Für weitere Berechnungen nehmen wir also $n(r, \varphi) := (r^2\cos\varphi, r^2\sin\varphi, -r)^T$. Zu dieser Orientierung des Normalvektors ist die positive Orientierung auf ∂F durch $\varphi \in [2\pi, 0]$ gegeben. Die Rotation lautet

$$\text{rot } a = \nabla \times a = \left(z^2 + x, 0, -z - 3\right)^T.$$

Damit erhalten wir

Rechte Seite:

$$\begin{aligned}
&\int_F (\nabla \times a) \cdot dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (\nabla \times a) \cdot n \, d\varphi \, dr \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} (r^2/2)^2 + r\cos\varphi \\ 0 \\ -(r^2/2) - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^2\cos\varphi \\ r^2\sin\varphi \\ -r \end{pmatrix} d\varphi dr \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^6}{4}\cos\varphi + r^3\cos^2\varphi + \frac{r^3}{2} + 3r \right) d\varphi dr \\
&= \int_0^2 \left[r^3 \frac{\varphi + \sin\varphi\cos\varphi}{2} + \frac{r^3}{2}\varphi + 3r\varphi \right]_0^{2\pi} dr = 2\pi \int_0^2 (r^3 + 3r) dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} + \frac{3r^2}{2} \right]_0^2 = 20\pi.
\end{aligned}$$

Die Parameterdarstellung des Randes ∂F ist

$$r(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 2\pi \leq \varphi \leq 0, \qquad r'(\varphi) = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Linke Seite:

$$\int_{\partial F} a \cdot dr = \int_{2\pi}^{0} a(r(\varphi)) \cdot r'(\varphi) d\varphi = \int_{2\pi}^{0} \begin{pmatrix} 3 \cdot 2\sin\varphi \\ -2 \cdot 2\cos\varphi \\ 2^2 \cdot 2\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$$

$$= \int_{2\pi}^{0} \left(-12\sin^2\varphi - 8\cos^2\varphi\right) d\varphi = \int_{2\pi}^{0} \left(-4\sin^2\varphi - 8\right) d\varphi$$

$$= \left[-4\frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{2} - 8\varphi\right]_{2\pi}^{0} = 20\pi.$$

- **Aufgabe 3.**

a) (2 Punkte) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$u''' + 2u'' - 8u' = 0. \tag{1}$$

Um die homogene Lösung zu finden machen wir den Ansatz $u(x) = e^{\lambda x}$. Für λ ergibt sich dann

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 8\lambda = 0$$

woraus zunächst $\lambda_1 = 0$ folgt. Weiters gilt

$$\begin{aligned}\lambda_{2,3} &= -1 \pm \sqrt{1+8} \\ &= \begin{cases} 2, \\ -4. \end{cases}\end{aligned}$$

Jede Linearkombination dieser Lösungen löst die homogene Differentialgleichung, die allgemeine Lösung lautet daher

$$u(x) = A + Be^{2x} + Ce^{-4x}.$$

b) (4 Punkte) Berechnen Sie eine Fundamentallösung U zu (1), die zusätzlich zu den Standardbedingungen, die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $\lim_{x\to+\infty} U(x) = 0$. Damit ist U beschränkt auf $\mathbb{R}_+$.
- U ist beschränkt auf $\mathbb{R}_-$. D.h., $\lim_{x\to-\infty} U(x) < \infty$.

Aus der allgemeinen Lösung von a) ergibt sich der stückweise Ansatz

$$U(x) = \begin{cases} A_1 + B_1e^{2x} + C_1e^{-4x}, & x > 0, \\ A_2 + B_2e^{2x} + C_2e^{-4x}, & x < 0. \end{cases}$$

Folgende Bedingungen ergeben sich an die Koeffizienten

(1) U stetig in Null: $A_1 + B_1 + C_1 = A_2 + B_2 + C_2$,
(2) U' stetig in Null: $2B_1 - 4C_1 = 2B_2 - 4C_2$,
(3) U'' hat bei Null einen Sprung der Höhe 1: $4B_1 + 16C_1 = 4B_2 + 16C_2 + 1$,
(4) $\lim_{x\to+\infty} U(x) = 0$ hat zu Folge, dass $A_1 = B_1 = 0$ gilt,
(5) $\lim_{x\to-\infty} U(x) < \infty$ is erfüllt falls $C_2 = 0$ ist.
Damit vereinfachen sich die ersten drei Gleichungen zu
(1) $C_1 = A_2 + B_2$, (2) $-4C_1 = 2B_2$, (3) $16C_1 = 4B_2 + 1$. Aus (2) und (3) ergibt sich $B_2 = -\frac{1}{12}$ und $C_1 = \frac{1}{24}$. Aus (1) folgt dann $A_2 = \frac{1}{8}$. Damit haben wir

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}e^{-4x}, & x > 0, \\ \frac{1}{8} - \frac{1}{12}e^{2x}, & x < 0. \end{cases}$$

c) (3 Zusatzpunkte) Berechnen sie f als Faltung $f(x) := (u * v)(x)$, mit $v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u(x) &:= 2|x|, \\ v(x) &:= \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung von f Fallunterscheidungen.

Wir berechnen

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-\xi)v(\xi)d\xi = \int_0^1 2|x-\xi|d\xi :$$

- $x < 0 \Rightarrow x - \xi < 0$

$$\int_0^1 2|x-\xi|d\xi = -\int_0^1 2(x-\xi)d\xi = -\left[2x\xi - \xi^2\right]_{\xi=0}^1 = 1 - 2x,$$

- $0 \le x \le 1$

$$\begin{aligned} \int_0^1 2|x-\xi|d\xi &= \int_0^x 2|x-\xi|d\xi + \int_x^1 2|x-\xi|d\xi = \int_0^x 2(x-\xi)d\xi - \int_x^1 2(x-\xi)d\xi \\ &= \left[2x\xi - \xi^2\right]_{\xi=0}^x - \left[2x\xi - \xi^2\right]_{\xi=x}^1 = 2x^2 - 2x + 1, \end{aligned}$$

- $x > 1 \Rightarrow x - \xi > 0$

$$\int_0^1 2|x-\xi|d\xi = \int_0^1 2(x-\xi)d\xi = \left[2x\xi - \xi^2\right]_{\xi=0}^1 = 2x - 1.$$

Daher gilt

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x < 0, \\ 2x^2 - 2x + 1, & 0 \le x \le 1, \\ 2x - 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Bemerkung: f ist stetig als Faltung von u stetig und v unstetig.