

**PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)**

**Test 1 Gruppe B (Mo, 28.04.2014) *(mit Lösung)***

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i> <div></div>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18(+3)</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,  
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

• **Aufgabe 1.** (6 Punkte)

Sei  $F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 3z, z \leq 3\}$  der beschränkte Teil des Paraboloids  $3z = x^2 + y^2$  mit dem Rand  $\partial F := \{(x, y, 3) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9\}$ . Gegeben sei ferner das Vektorfeld

$$a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad a(x, y, z) = (2y, -zx, z^2y)^T.$$

Berechnen Sie die beiden Seiten des Satzes von Stokes.

$$\text{Hinweis: } \int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2}(t + \cos t \sin t), \quad \int \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2}(t - \cos t \sin t)$$

Es gilt also folgende Gleichheit zu zeigen:  $\int_{\partial F} a \cdot dr = \int_F (\nabla \times a) \cdot dS$ .

Parametrisierung der Fläche  $F$  durch Polarkoordinaten

$$F(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ r^2/3 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 3.$$

Der Normalvektor,

$$n(r, \varphi) := \frac{\partial F}{\partial r} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \frac{2r}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2r^2}{3} \cos \varphi \\ -\frac{2r^2}{3} \sin \varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

Schaut man sich die Orientierung des Normalvektors an, z.B., an der Stelle  $\varphi = \pi/2$  und  $r = 1$ , so stellt man fest, dass  $n(1, \pi/2) = (0, -\frac{2}{3}, 1)^T$  gilt, also zeigt der Normalvektor in das Innere des Paraboloids. Für weitere Berechnungen nehmen wir also

$n(r, \varphi) := (\frac{2r^2}{3} \cos \varphi, \frac{2r^2}{3} \sin \varphi, -r)^T$ . Zu dieser Orientierung des Normalvektors ist die positive Orientierung auf  $\partial F$  durch  $\varphi \in [2\pi, 0]$  gegeben. Die Rotation lautet

$$\text{rot } a = \nabla \times a = (z^2 + x, 0, -z - 2)^T.$$

Damit erhalten wir

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} \int_F (\nabla \times a) \cdot dS &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (\nabla \times a) \cdot n \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} (r^2/3)^2 + r \cos \varphi \\ 0 \\ -(r^2/3) - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2r^2}{3} \cos \varphi \\ \frac{2r^2}{3} \sin \varphi \\ -r \end{pmatrix} d\varphi \, dr \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left( \frac{2r^6}{27} \cos \varphi + \frac{2r^3}{3} \cos^2 \varphi + \frac{r^3}{3} + 2r \right) d\varphi \, dr \\ &= \int_0^3 \left[ \frac{2r^3}{3} \frac{\varphi + \sin \varphi \cos \varphi}{2} + \frac{r^3}{3} \varphi + 2r\varphi \right]_0^{2\pi} dr = \frac{4}{3} \pi \int_0^3 (r^3 + 3r) dr = \frac{4}{3} \pi \left[ \frac{r^4}{4} + \frac{3r^2}{2} \right]_0^3 = 45\pi. \end{aligned}$$

Die Parameterdarstellung des Randes  $\partial F$  ist

$$r(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 \cos \varphi \\ 3 \sin \varphi \\ 3 \end{pmatrix}, \quad 2\pi \leq \varphi \leq 0, \quad r'(\varphi) = \begin{pmatrix} -3 \sin \varphi \\ 3 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Linke Seite:

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} a \cdot dr &= \int_{2\pi}^0 a(r(\varphi)) \cdot r'(\varphi) d\varphi = \int_{2\pi}^0 \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \sin \varphi \\ -3 \cdot 3 \cos \varphi \\ 3^2 \cdot 3 \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \sin \varphi \\ 3 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\ &= \int_{2\pi}^0 (-18 \sin^2 \varphi - 27 \cos^2 \varphi) d\varphi = \int_{2\pi}^0 (9 \sin^2 \varphi - 27) d\varphi \\ &= \left[ 9 \frac{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}{2} - 27\varphi \right]_{2\pi}^0 = 45\pi. \end{aligned}$$

• Aufgabe 2.

a) (2 Punkte) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$-u''' - 4u'' + 5u' = 0. \quad (1)$$

Um die homogene Lösung zu finden machen wir den Ansatz  $u(x) = e^{\lambda x}$ . Für  $\lambda$  ergibt sich dann

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda = 0$$

woraus zunächst  $\lambda_1 = 0$  folgt. Weiters gilt

$$\begin{aligned} \lambda_{2,3} &= -2 \pm \sqrt{4+5} \\ &= \begin{cases} 1, \\ -5. \end{cases} \end{aligned}$$

Jede Linearkombination dieser Lösungen löst die homogene Differentialgleichung, die allgemeine Lösung lautet daher

$$u(x) = A + Be^x + Ce^{-5x}.$$

b) (4 Punkte) Berechnen Sie eine Fundamentallösung  $U$  zu (1), die zusätzlich zu den Standardbedingungen, die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = -1$ , Damit ist  $U$  beschränkt auf  $\mathbb{R}_+$ .
- $U$  ist beschränkt auf  $\mathbb{R}_-$ . D.h.,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) < \infty$ .

Aus der allgemeinen Lösung von a) ergibt sich der stückweise Ansatz

$$U(x) = \begin{cases} A_1 + B_1 e^x + C_1 e^{-5x}, & x > 0, \\ A_2 + B_2 e^x + C_2 e^{-5x}, & x < 0. \end{cases}$$

Folgende Bedingungen ergeben sich an die Koeffizienten

- (1)  $U$  stetig in Null:  $A_1 + B_1 + C_1 = A_2 + B_2 + C_2$ ,
- (2)  $U'$  stetig in Null:  $B_1 - 5C_1 = B_2 - 5C_2$ ,
- (3)  $U''$  hat bei Null einen Sprung der Höhe 1:  $B_1 + 25C_1 = B_2 + 25C_2 + 1$ ,
- (4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = -1$  hat zu Folge, dass  $A_1 = -1$  und  $B_1 = 0$  gilt,
- (5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) < \infty$  ist erfüllt falls  $C_2 = 0$  ist.

Damit vereinfachen sich die ersten drei Gleichungen zu

(1)  $C_1 - 1 = A_2 + B_2$ , (2)  $-5C_1 = B_2 - 5C_2$ , (3)  $25C_1 = B_2 + 1$ . Aus (2) und (3) ergibt sich  $B_2 = -\frac{1}{6}$  und  $C_1 = \frac{1}{30}$ . Aus (1) folgt dann  $A_2 = -\frac{24}{30}$ . Damit haben wir

$$U(x) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{30}e^{-5x}, & x > 0, \\ -\frac{24}{30} - \frac{1}{6}e^x, & x < 0. \end{cases}$$

c) (3 Zusatzpunkte) Berechnen sie  $f$  als Faltung  $f(x) := (u * v)(x)$ , mit  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$u(x) := -|x|,$$
$$v(x) := \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung von  $f$  Fallunterscheidungen*

Wir berechnen

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x - \xi)v(\xi)d\xi = - \int_0^1 2|x - \xi|d\xi :$$

- $x < 0 \Rightarrow x - \xi < 0$

$$- \int_0^1 2|x - \xi|d\xi = \int_0^1 2(x - \xi)d\xi = [2x\xi - \xi^2]_{\xi=0}^1 = 2x - 1,$$

- $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} - \int_0^1 2|x - \xi|d\xi &= - \int_0^x 2|x - \xi|d\xi - \int_x^1 2|x - \xi|d\xi = - \int_0^x 2(x - \xi)d\xi + \int_x^1 2(x - \xi)d\xi \\ &= - [2x\xi - \xi^2]_{\xi=0}^x + [2x\xi - \xi^2]_{\xi=x}^1 = -2x^2 + 2x - 1, \end{aligned}$$

- $x > 1 \Rightarrow x - \xi > 0$

$$- \int_0^1 2|x - \xi|d\xi = - \int_0^1 2(x - \xi)d\xi = - [2x\xi - \xi^2]_{\xi=0}^1 = 1 - 2x.$$

Daher gilt

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0, \\ -2x^2 + 2x - 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 - 2x, & 1 < x. \end{cases}$$

*Bemerkung:  $f$  ist stetig als Faltung von  $u$  stetig und  $v$  unstetig.*

• **Aufgabe 3.**

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie das transversale Kurvenintegral des Vektorfelds

$$a(x, y) = \begin{pmatrix} \sin((y-3)^{1/3}) \\ (-2-x)y \end{pmatrix}$$

längs der Kurve  $x = -2 + 3t^2$ ,  $y = t^3 + 3$ ,  $t \in [0, 1]$ .

*Hinweis:*  $\int t^2 \sin t \, dt = -t^2 \cos t + 2t \sin t + 2 \cos t$ .

Das transversale Kurvenintegral berechnet man nach der folgenden Formel:

$$\int_0^1 a(x(t), y(t)) \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} dt.$$

Setzen wir  $x(t)$  und  $y(t)$  in das Vektorfeld und den Tangentialvektor ein, so erhalten wir

$$a(x(t), y(t)) = (\sin(t), -3t^5 - 9t^2), \quad \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -6t \end{pmatrix},$$

also insgesamt

$$\int_0^1 (\sin(t), -3t^5 - 9t^2) \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -6t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (3t^2 \sin(t) - 18t^6 + 54t^3) dt.$$

Nun gilt laut Hinweis

$$\begin{aligned} \int_0^1 3t^2 \sin(t) dt &= 3[-t^2 \cos(t) + 2t \sin(t) + 2 \cos(t)] \Big|_0^1 = 3(-\cos(1) + 2 \sin(1) + 2 \cos(1) - 2) \\ &= 6 \sin(1) + 3 \cos(1) - 6. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir,

$$\int_0^1 3t^2 \sin(t) - 18t^6 + 54t^3 dt = 6 \sin(1) + 3 \cos(1) - 6 - \frac{18}{7} + \frac{27}{2}.$$

b) (3 Punkte) Gegeben sei das Vektorfeld

$$a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \longmapsto \left( xe^{3x} + ye^{xy} + \ln z, xe^{xy} - 2yz, \frac{x}{z} - y^2 \right)^T.$$

Zeigen Sie, dass es für  $a$  ein Potential gibt. Berechnen Sie anschließend das Potential.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Weiters gilt,

$$\operatorname{rot} a = \nabla \times a = \begin{pmatrix} \partial_2 a_3 - \partial_3 a_2 \\ \partial_3 a_1 - \partial_1 a_3 \\ \partial_1 a_2 - \partial_2 a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - (-2y) \\ \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \\ e^{xy}(1+xy) - e^{xy}(1+xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist  $a$  ein Gradientenfeld und es existiert ein Potential.

Für das Potential  $\Phi$  gilt:  $a = \nabla \Phi$ .

Zur Berechnung des Potentials integrieren wir  $a_1$  nach  $x$  und erhalten

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + e^{xy} + \ln(z)x + c(y, z).$$

Es muss aber auch  $\Phi_y = a_2$  gelten,

$$\Phi_y(x, y, z) = xe^{xy} + c_y(y, z) \stackrel{!}{=} xe^{xy} - 2yz.$$

Also  $c_y(y, z) = -2yz$  und somit  $c(y, z) = -y^2z + c(z)$ .

Zusätzlich muss  $\Phi_z = a_3$  sein und wir erhalten

$$\Phi_z(x, y, z) = \frac{x}{z} - y^2 + c'(z) \stackrel{!}{=} \frac{x}{z} - y^2.$$

Also  $c'(z) = 0$  und somit  $c(z) = c$ .

Somit lautet das Potential

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + e^{xy} + \ln(z)x - y^2z + c.$$