

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 1 Gruppe A (Mo, 11.05.2015) (mit Lösung)

— Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i> <div></div>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

• Aufgabe 1.

- a) (3 Punkte) Bestimmen Sie das Kurvenintegral des auf dem Gebiet
 $D := \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{u} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \wedge y \in (-\infty, 0]\}$ definierten Vektorfelds

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2)} + xz \\ \frac{y}{(x^2+y^2)} + yz \\ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

längs der Kurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R \sin(t) \\ R \cos(t) \\ \frac{2t}{\pi} \end{pmatrix}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad R = \text{const.}$$

Das Kurvenintegral berechnet man nach der folgenden Formel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} dt.$$

Die Berechnung des Tangentialvektors der Kurve ergibt

$$\mathbf{T}(x(t), y(t), z(t)) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ -R \sin(t) \\ \frac{2}{\pi} \end{pmatrix}.$$

Das Einsetzen der Parametrisierung ergibt unter Verwendung von $1 = \sin^2(t) + \cos^2(t)$

$$\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} \sin(t) + \frac{2R}{\pi} t \sin(t) \\ \frac{1}{R} \cos(t) + \frac{2R}{\pi} t \cos(t) \\ \frac{1}{2} R^2 \end{pmatrix}$$

also insgesamt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{R} \sin(t) + \frac{2R}{\pi} t \sin(t) \right] R \cos(t) - \left[\frac{1}{R} \cos(t) + \frac{2R}{\pi} t \cos(t) \right] R \sin(t) + \frac{R^2}{\pi} dt$$

und vereinfacht

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2}{\pi} dt = \frac{R^2}{2}.$$

b) (3 Punkte)

Untersuchen Sie das Vektorfeld \mathbf{F} aus Punkt a).

(i) Finden Sie das größte einfach zusammenhängende Gebiet, auf dem \mathbf{F} rotationsfrei ist.

(ii) Bestimmen Sie das Potential von \mathbf{F} in diesem Gebiet.

(iii) Welches Ergebnis erwarten Sie für das Kurvenintegral des Vektorfeldes längs der Kurve ω ,

$$\omega(t) = \begin{pmatrix} tR \\ R(1-t) \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1] ?$$

Vergleichen Sie dazu die Kurve ω mit der Kurve \mathbf{r} aus Aufgabenteil a).

Hinweis: $\int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C$

(i)

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - y \\ x - x \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit obiger Gleichung findet man, dass \mathbf{F} auf dem ganzen Definitionsbereich, also auf $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{u} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \wedge y \in (-\infty, 0]\}$ rotationsfrei ist. Der Definitionsbereich ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Damit ist \mathbf{F} ein Gradientenfeld und ein Potential existiert auf D .

(ii)

Für das Potential Φ gilt: $\mathbf{F} = \nabla \Phi$.

Zur Berechnung des Potentials integrieren wir F_1 nach x und erhalten unter Beachtung des Hinweises:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} x^2 z + c(y, z).$$

Es muss aber auch $\frac{\partial}{\partial y} \Phi_y = F_2$ gelten,

$$\frac{\partial}{\partial y} \Phi_y(x, y, z) = \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y} c(y, z) \stackrel{!}{=} \frac{y}{x^2 + y^2} + yz.$$

Also ist $c(y, z) = \frac{1}{2} y^2 z + \tilde{c}(z)$. Zusätzlich muss $\frac{\partial}{\partial z} \Phi_z = F_3$ sein und wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi_z(x, y, z) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{c}(z) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2.$$

Also ist $\tilde{c}(z) = \tilde{\tilde{c}}$ und das Potential von \mathbf{F} ergibt sich zu:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{z}{2} (x^2 + y^2) + \tilde{\tilde{c}}.$$

(iii)

Das Kurvenintegral kann ohne explizite Berechnung bestimmt werden. Die Anfangs- und Endpunkte der Kurven \mathbf{r} aus Punkt a) und $\boldsymbol{\omega}$ aus Punkt b) stimmen überein und da Kurvenintegrale von Gradientenfeldern wegunabhängig sind, ergibt sich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) dt = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(\tau)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(\tau) d\tau.$$

• Aufgabe 2.

(6 Punkte) Satz von Gauß

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß das Integral

$$\int_{\partial A} \begin{pmatrix} x^3 - 6x^2 \\ y^3 - z \\ x^2 + y + 2 \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{S},$$

wobei A der durch $y^2 + (x - 2)^2 \leq 4$ und $-3 \leq z \leq 2$ bestimmte Zylinder ist.

Das Integral kann mit Hilfe des Satzes von Gauß auf folgende Form umgeschrieben werden:

$$\int_{\partial A} \begin{pmatrix} x^3 - 6x^2 \\ y^3 - z \\ x^2 + y + 2 \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{S} = \int_A \nabla \cdot \begin{pmatrix} x^3 - 6x^2 \\ y^3 - z \\ x^2 + y + 2 \end{pmatrix} dV.$$

Das entspricht

$$\int_A \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^3 - 6x^2 \\ y^3 - z \\ x^2 + y + 2 \end{pmatrix} dV = \int_A (3x^2 - 12x + 3y^2) dV.$$

Nun müssen die Integralgrenzen bestimmt werden.

Aus der Symmetrie des Körpers folgt die Annahme, dass Rechnen mit Zylinderkoordinaten von Vorteil ist. Weiters erkennt man aus der Bedingung $y^2 + (x - 2)^2 \leq 4$, dass die Achse des Zylinders um 2 vom Mittelpunkt abweicht. Daher verwenden wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin(\phi) + 2 \\ r \cos(\phi) \\ z \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in obige Bedingung liefert:

$$y^2 + (x - 2)^2 \leq 4 \Leftrightarrow r^2 \sin^2(\phi) + r^2 \cos^2(\phi) \leq 4 \Rightarrow r \leq 2.$$

Als Grenzen des Integral erhalten wir $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ und $-3 \leq z \leq 2$ und es folgt

$$\int_{-3}^2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3(r \sin(\phi) + 2)^2 + 3r^2 \cos^2(\phi) - 12(r \sin(\phi) + 2)) r dr d\phi dz,$$

wobei wir $dV = dx dy dz = r dr d\phi dz$ verwenden.

Unter Verwendung von $\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1$ vereinfacht sich der Ausdruck unter dem Integral zu

$$\int_{-3}^2 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 r dr (3r^2 - 12).$$

Die Berechnung des Integrals liefert

$$z \Big|_{-3}^2 \phi \Big|_0^{2\pi} \int_0^2 (3r^3 - 12r) dr = 5 \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{3}{4} r^4 - \frac{12}{2} r^2 \right) \Big|_0^2.$$

Dies führt schließlich zu dem Ergebnis

$$\int_{\partial A} \begin{pmatrix} x^3 - 6x^2 \\ y^3 - z \\ x^2 + y + 2 \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{S} = -120\pi.$$

• **Aufgabe 3.**

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Lösung der Differentialgleichung

$$Lu = u'' + 3u' = 0$$

folgende Gestalt hat:

$$u_h = A + Be^{-3x}.$$

Um dies zu zeigen, müssen wir nur die Lösung u_h in die Differentialgleichung einsetzen:

$$u_h'' + 3u_h' = (A + Be^{-3x})'' + 3(A + Be^{-3x})' = 9Be^{-3x} - 9Be^{-3x} = 0.$$

b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Fundamentallösung von $LU = \delta$, die sowohl die Standardbedingungen als auch die zusätzliche Forderung $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = 0$ erfüllt.

Der allgemeine Ansatz für die Fundamentallösung lautet,

$$U(x) = \begin{cases} A_- + B_- e^{-3x}, & x < 0 \\ A_+ + B_+ e^{-3x}, & x > 0 \end{cases}$$

Durch die Forderung $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = 0$ erhalten wir $A_- = B_- = 0$.

Damit $U(x)$ Fundamentallösung ist, muss gelten: U ist stetig an der Stelle $x = 0$ und $U'(x)$ hat an der Stelle $x = 0$ einen Sprung der Höhe 1.

Es muss somit gelten:

$$U' \text{ hat an der Stelle Null einen Sprung der Höhe 1: } -3B_+ e^0 = 1 \Rightarrow B_+ = -\frac{1}{3},$$

$$U \text{ ist stetig in Null: } A_+ - \frac{1}{3}e^0 = A_+ - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow A_+ = \frac{1}{3}.$$

Die Fundamentallösung lautet somit:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3x}, & x > 0. \end{cases}$$

c) (4 Punkte) Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } -1 < x < 1, \\ \frac{1}{x^4}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = x^2 + 3.$$

Berechnen Sie die Konvolution $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)g(\xi)d\xi$.

Hinweis: Substituieren Sie $u = x - \xi$.

Es gilt

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)g(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{-1} \frac{\xi^2 + 3}{(x - \xi)^4} d\xi + \int_{-1}^1 \xi^2 + 3 d\xi + \int_1^{\infty} \frac{\xi^2 + 3}{(x - \xi)^4} d\xi.$$

Berechnung des mittleren Integrals führt auf

$$\int_{-1}^1 \xi^2 + 3 d\xi = \frac{\xi^3}{3} + 3\xi \Big|_{-1}^1 = \frac{20}{3}.$$

Das erste Integral lässt sich durch die im Hinweis angegebene Substitution berechnen,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\xi^2 + 3}{(x - \xi)^4} d\xi &\stackrel{u = x - \xi}{=} - \int_{-\infty}^{x+1} \frac{(x - u)^2 + 3}{u^4} du = - \int_{-\infty}^{x+1} \frac{x^2 - 2xu + u^2 + 3}{u^4} du \\ &= - \int_{-\infty}^{x+1} \frac{x^2}{u^4} du + \int_{-\infty}^{x+1} \frac{2x}{u^3} du - \int_{-\infty}^{x+1} \frac{1}{u^2} du - \int_{-\infty}^{x+1} \frac{3}{u^4} du \\ &= \left[\frac{x^2}{3u^3} - \frac{x}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{3}{3u^3} \right]_{-\infty}^{x+1} = \left[\frac{x^2 - 3ux + 3u^2 + 3}{3u^3} \right]_{-\infty}^{x+1} \\ &= \frac{x^2 + 3x + 6}{3(x + 1)^3}. \end{aligned}$$

Im letzten Integral müssen nur noch die richtigen Grenzen eingesetzt werden

$$\int_1^{\infty} \frac{\xi^2 + 3}{(x - \xi)^4} d\xi = \left[\frac{x^2 - 3ux + 3u^2 + 3}{3u^3} \right]_{x-1}^{\infty} = -\frac{x^2 - 3x + 6}{3(x - 1)^3}.$$

Somit gilt

$$(f * g)(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{3(x + 1)^3} + \frac{20}{3} - \frac{x^2 - 3x + 6}{3(x - 1)^3}.$$