Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2014

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 2 Gruppe A (Fr, 19.06.2015) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

a) (3 Punkte) Zeigen Sie dass die Fouriertransformierten der Funktionen

$$f(x) = e^{-\frac{|x|}{2\pi}} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in [0, 2\pi] \\ 0, & \text{für } sonst \end{cases}$$

existieren, indem Sie zeigen, dass das Integral von $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ (bzw. $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx$) endlich ist. Existiert auch die Fouriertransformierte von der Funktion $f * g(x)$? Zeigen bzw. begründen Sie ihre Aussagen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\frac{|x|}{2\pi}} \right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x|}{2\pi}} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{x}{2\pi}} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{2\pi}} dx = 4\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx = \int_{0}^{2\pi} 1 dx = 2\pi$$

Somit sind beide Integrale wohldefiniert und es existieren jeweils die Fouriertransformierten. Es existiert auch die Fouriertransformierte von der Funktion $f * g$, da $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g} < \infty$.

b) (3 Punkte) Sei eine Funktion gegeben durch: $f(x) = 3 \cdot \max(1 - |x|, 0)$. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \begin{cases} 3 \cdot (1 - |x|), & \text{für } x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{für } sonst. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f(x)$.

Für $x \in (-1, 1)$ ist $1 - |x|$ positiv, ansonsten Null oder negativ. Da wir das Maximum suchen ist der erste Punkt schon gezeigt.

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= 3\int_{-1}^{1}(1-|x|)\cdot e^{-ikx}dx = 3\int_{-1}^{0}(1+x)\cdot e^{-ikx}dx + \int_{0}^{1}(1-x)\cdot e^{-ikx}dx \\
&= 3\int_{0}^{1}(1-x)(e^{ikx}+e^{-ikx})dx = 3\frac{(1-x)(e^{ikx}-e^{-ikx})}{ik}\Big|_0^1 + 3\int_0^1 \frac{(e^{ikx}-e^{-ikx})}{ik}dx \\
&= 3\frac{(e^{ikx}-e^{-ikx})}{(ik)^2}\Big|_0^1 = -3\frac{2}{k^2}(\cos(k)-1)
\end{aligned}
$$

- **Aufgabe 2.**

(6 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation die Lösung des Anfangswertproblems für $u = u(x,t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -4\frac{\partial u}{\partial x}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty,$$
$$u(x,0) = e^{-|x|}.$$

Hinweis: Es gilt zu beachten: $u(\sigma(t,x),t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u(k,t)} e^{ik\sigma(t,x)} dk.$

Das transformierte Problem für $\hat{u} = \hat{u}(k,t)$ lautet:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -4(ik)\hat{u} \quad \text{(siehe 4.27)}.$$

Daraus folgt die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\hat{u}(k,t) = c(k)e^{-4ikt}.$$

Bestimmung des unbestimmten Terms $c(k)$:

$$\begin{aligned}
c(k) = \hat{u}(k,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-ikx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-ikx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-ikx}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-ikx}dx \\
&= \frac{2}{1+k^2}.
\end{aligned}$$

Als letzter Schritt muss $\hat{u}(k,t)$ zurücktransformiert werden:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+k^2}e^{-4ikt}e^{ikx}dk \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+k^2}e^{ik(-4t+x)}dk \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+k^2}e^{ik\sigma(t,x)}dk \\
&= e^{-|\sigma(t,x)|} \\
&= e^{-|-4t+x|}.
\end{aligned}$$

• **Aufgabe 3.** Gesucht ist die Funktion $y(x)$, die das Integral,

$$I[y(x)] = \int_0^{3\pi} -y^2 - 18y + 2yy' + 9(y')^2 dx = \int_0^{3\pi} f(x)dx \to min \tag{1}$$

unter der Nebenbedingung,

$$\int_0^{3\pi} g(x)dx = \int_0^{3\pi} (yy' + 2y)dx = 6\pi + 18 \tag{2}$$

minimiert.

a) (2 Punkte) Setzen Sie in einem ersten Schritt $h(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$ in die Euler-Lagrange Gleichung ein und vereinfachen Sie den Ausdruck.

Mit Hilfe der Formel für die Euler-Lagrange Gleichung,

$$\frac{\partial h(x,\lambda)}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h(x,\lambda)}{\partial y'}\right) \tag{3}$$

erhalten wir mit,

$$h(x, \lambda) = -y^2 - 18y + 2yy' + 9(y')^2 - \lambda(yy' + 2y) \tag{4}$$

und durch Berechung der beiden Seiten, und kürzen einiger Terme,

$$\frac{\partial h(x,\lambda)}{\partial y} = -2y - 18 + 2y' - \lambda y' - 2\lambda \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h(x,\lambda)}{\partial y'}\right) = 2y' + 18y'' - \lambda y' \tag{6}$$

die zu lösende Differentialgleichung.

$$-2y - 18 - 2\lambda = 18y'' \tag{7}$$

b) (4 Punkte) Lösen Sie die in Aufgabenteil a erhaltene Differentialgleichung und bestimmen Sie die Funktion $y(x)$ unter den Randbedingungen $y(0) = 1$ und $y(3\pi) = 1$.

Hinweise:
Verwenden Sie zum Finden der homogenen Lösung den Ansatz $y_0(x) = e^{\alpha x}$
Beachten Sie, dass $\tilde{c}\sin(x) = c\Big(e^{ix} - e^{-ix}\Big)$ und dass $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung,

$$18y'' + 2y = 0 \tag{8}$$

kann mit dem Ansatz $y_0(x) = ce^{\alpha x}$ gefunden werden. Nach Einsetzen des Ansatzes und kurzem Umformen,

$$\begin{aligned} 18\alpha^2 e^{\alpha x} + 2e^{\alpha x} &= 0 && (9)\\ 18\alpha^2 + 2 &= 0 && (10) \end{aligned}$$

erhält man $\alpha = \pm\frac{1}{3}i$.
Die homogene Lösung hat also die Form,

$$y_{hom}(x) = C_1 e^{\frac{1}{3}ix} + C_2 e^{-\frac{1}{3}ix} \tag{11}$$

Da der inhomogene Anteil konstant in x ist, ergibt sich die partikuläre Lösung zu

$$y_{par}(x) = -\lambda - 9 \tag{12}$$

und eine vollständige Lösung zu

$$y(x) = y_{hom} + y_{par} = C_1 e^{\frac{1}{3}ix} + C_2 e^{-\frac{1}{3}ix} - \lambda - 9 \tag{13}$$

Nun müssen nur noch die Konstanten bestimmt werden.
Aus den Randbbedingungen und dem Hinweis folgert,

$$\begin{aligned} y(0) = 1 \quad &\Rightarrow \quad C_1 + C_2 - \lambda - 9 = 1 && (14)\\ y(3\pi) = 1 \quad &\Rightarrow \quad -C_1 - C_2 - \lambda - 9 = 1 && (15)\\ &\Rightarrow \quad C_1 = -C_2 && (16)\\ &\Rightarrow \quad \lambda = -10 && (17) \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich die Lösung zu,

$$y(x) = \tilde{C}\sin(\frac{1}{3}x) + 1. \tag{18}$$

Betrachten wir noch einmal die Nebenbedingung und berechnen das Integral,

$$\int_0^{3\pi} g(x)dx = \int_0^{3\pi} y(x)y'(x) + 2y(x)dx \tag{19}$$

$$6\pi + 18 = \int_0^{3\pi} (\tilde{C}\sin(\frac{1}{3}x) + 1)\tilde{C}\cos(\frac{1}{3}x)\frac{1}{3} + 2(\tilde{C}\sin(\frac{1}{3}x) + 1)dx \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

Zerlegung in 4 Teile,

$$\tilde{C}^2\frac{1}{3}\int_0^{3\pi} \cos(\frac{1}{3}x)\sin(\frac{1}{3}x)dx = \tilde{C}^2\Big(\sin(\frac{1}{3}x)\Big)^2|_0^{3\pi} = 0 \tag{22}$$

$$\tilde{C}\int_0^{3\pi} \cos(\frac{1}{3}x)dx = 3\tilde{C}\sin(\frac{1}{3}x)|_0^{3\pi} = 0 \tag{23}$$

$$2\tilde{C}\int_0^{3\pi} \sin(\frac{1}{3}x)dx = 6\tilde{C}\cos(\frac{1}{3}x)|_0^{3\pi} = 12\tilde{C} \tag{24}$$

$$2\int_0^{3\pi} dx = 6\pi \tag{25}$$

und wir erhalten eine Gleichung zur Bestimmung der letzten Konstanten.

$$6\pi + 12\tilde{C} = 6\pi + 18 \tag{26}$$

$$\Rightarrow \tilde{C} = \frac{3}{2} \tag{27}$$

somit erhalten wir die finale Lösung zu:

$$y(x) = \frac{3}{2}\sin(\frac{1}{3}x) + 1 \tag{28}$$