

# **PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)**

## **Test 2 Gruppe C (Fr, 19.06.2015) *(mit Lösung)***

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

1.	2.	3.	gesamt
			<div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 40px;"></div>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden **Kästchen** eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,  
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

• **Aufgabe 1.**

(6 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation die Lösung des Anfangswertproblems für  $u = u(x, t)$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -3 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty,$$
$$u(x, 0) = e^{-|x|}.$$

*Hinweis: Es gilt zu beachten:  $u(\sigma(t, x), t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u(k, t)} e^{ik\sigma(t, x)} dk$ .*

Das transformierte Problem für  $\hat{u} = \hat{u}(k, t)$  lautet:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -3(ik)\hat{u} \quad (\text{siehe 4.27}).$$

Daraus folgt die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\hat{u}(k, t) = c(k)e^{-3ikt}.$$

Bestimmung des unbestimmten Terms  $c(k)$ :

$$\begin{aligned} c(k) = \hat{u}(k, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^x e^{-ikx} dx + \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{2}{1 + k^2}. \end{aligned}$$

Als letzter Schritt muss  $\hat{u}(k, t)$  zurücktransformiert werden:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + k^2} e^{-3ikt} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + k^2} e^{ik(-3t+x)} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + k^2} e^{ik\sigma(t, x)} dk \\ &= e^{-|\sigma(t, x)|} \\ &= e^{-|-3t+x|}. \end{aligned}$$

• **Aufgabe 2.**

Gesucht ist die Funktion  $u(\varphi)$ , die das Integral,

$$I[u(\varphi)] = \int_0^{3\pi} -u^2 - 18u + uu' + 9(u')^2 d\varphi = \int_0^{3\pi} f(\varphi) d\varphi \rightarrow \min \quad (1)$$

unter der Nebenbedingung,

$$\int_0^{3\pi} g(\varphi) d\varphi = \int_0^{3\pi} (3uu' + 2u) d\varphi = 18\pi + 6 \quad (2)$$

minimiert.

- a) (2 Punkte) Setzen Sie in einem ersten Schritt  $h(\varphi, \lambda) = f(\varphi) - \lambda g(\varphi)$  in die Euler-Lagrange Gleichung ein und vereinfachen Sie den Ausdruck.

Mit Hilfe der Formel für die Euler-Lagrange Gleichung,

$$\frac{\partial h(\varphi, \lambda)}{\partial u} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\partial h(\varphi, \lambda)}{\partial u'} \right) \quad (3)$$

erhalten wir mit,

$$h(\varphi, \lambda) = -u^2 - 18u + uu' + 9(u')^2 - \lambda(3uu' + 2u) \quad (4)$$

und durch Berechnung der beiden Seiten, und kürzen einiger Terme,

$$\frac{\partial h(\varphi, \lambda)}{\partial u} = -2u - 18 + u' - 3\lambda u' - 2\lambda \quad (5)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\partial h(\varphi, \lambda)}{\partial u'} \right) = u' + 18u'' - 3\lambda u' \quad (6)$$

die zu lösende Differentialgleichung.

$$-2u - 18 - 2\lambda = 18u'' \quad (7)$$

- b) (4 Punkte) Lösen Sie die in Aufgabenteil a erhaltene Differentialgleichung und bestimmen Sie die Funktion  $u(\varphi)$  unter den Randbedingungen  $u(0) = 3$  und  $u(3\pi) = 3$ .

Hinweise:

Verwenden Sie zum Finden der homogenen Lösung den Ansatz  $u_0(\varphi) = e^{\alpha\varphi}$

Beachten Sie, dass  $\tilde{c}\sin(\varphi) = c(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$  und dass  $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung,

$$18u'' + 2u = 0 \quad (8)$$

kann mit dem Ansatz  $u_0(\varphi) = e^{\alpha\varphi}$  gefunden werden. Nach Einsetzen des Ansatzes und kurzem Umformen,

$$18\alpha^2 e^{\alpha\varphi} + 2e^{\alpha\varphi} = 0 \quad (9)$$

$$18\alpha^2 + 2 = 0 \quad (10)$$

erhält man  $\alpha = \pm\frac{1}{3}i$ .

Die homogene Lösung hat also die Form,

$$u_{hom}(\varphi) = C_1 e^{\frac{1}{3}i\varphi} + C_2 e^{-\frac{1}{3}i\varphi} \quad (11)$$

Da der inhomogene Anteil konstant in  $\varphi$  ist, ergibt sich die partikuläre Lösung zu

$$u_{par}(\varphi) = -\lambda - 9 \quad (12)$$

und eine vollständige Lösung zu

$$u(\varphi) = u_{hom} + u_{par} = C_1 e^{\frac{1}{3}i\varphi} + C_2 e^{-\frac{1}{3}i\varphi} - \lambda - 9 \quad (13)$$

Nun müssen nur noch die Konstanten bestimmt werden.

Aus den Randbedingungen und dem Hinweis folgert,

$$u(0) = 3 \Rightarrow C_1 + C_2 - \lambda - 9 = 3 \quad (14)$$

$$u(3\pi) = 3 \Rightarrow -C_1 - C_2 - \lambda - 9 = 3 \quad (15)$$

$$\Rightarrow C_1 = -C_2 \quad (16)$$

$$\Rightarrow \lambda = -12 \quad (17)$$

Damit vereinfacht sich die Lösung zu,

$$u(\varphi) = \tilde{C} \sin\left(\frac{1}{3}\varphi\right) + 3. \quad (18)$$

Betrachten wir noch einmal die Nebenbedingung und berechnen das Integral,

$$\int_0^{3\pi} u(\varphi) d\varphi = \int_0^{3\pi} 3u(\varphi)u'(\varphi) + 2u(\varphi) d\varphi \quad (19)$$

$$18\pi + 6 = \int_0^{3\pi} 3(\tilde{C} \sin(\frac{1}{3}\varphi) + 3)\tilde{C} \cos(\frac{1}{3}\varphi) \frac{1}{3} + 2(\tilde{C} \sin(\frac{1}{3}\varphi) + 3) d\varphi \quad (20)$$

$$(21)$$

Zerlegung in 4 Teile,

$$3\tilde{C}^2 \frac{1}{3} \int_0^{3\pi} \cos(\frac{1}{3}\varphi) \sin(\frac{1}{3}\varphi) d\varphi = 3\tilde{C}^2 \left( \sin(\frac{1}{3}\varphi) \right)^2 \Big|_0^{3\pi} = 0 \quad (22)$$

$$9\tilde{C} \frac{1}{3} \int_0^{3\pi} \cos(\frac{1}{3}\varphi) d\varphi = 27\frac{1}{3}\tilde{C} \sin(\frac{1}{3}\varphi) \Big|_0^{3\pi} = 0 \quad (23)$$

$$2\tilde{C} \int_0^{3\pi} \sin(\frac{1}{3}\varphi) d\varphi = 6\tilde{C} \cos(\frac{1}{3}\varphi) \Big|_0^{3\pi} = 12\tilde{C} \quad (24)$$

$$6 \int_0^{3\pi} d\varphi = 18\pi \quad (25)$$

und wir erhalten eine Gleichung zur Bestimmung der letzten Konstanten.

$$18\pi + 12\tilde{C} = 18\pi + 6 \quad (26)$$

$$\Rightarrow \tilde{C} = \frac{1}{2} \quad (27)$$

somit erhalten wir die finale Lösung zu:

$$u(\varphi) = \frac{1}{2} \sin(\frac{1}{3}\varphi) + 3 \quad (28)$$

• Aufgabe 3.

a) (3 Punkte) Sei eine Funktion gegeben durch:  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \max(1 - |x|, 0)$ . Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (1 - |x|), & \text{für } x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{für } \textit{sonst}. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte von  $f(x)$ .

Für  $x \in (-1, 1)$  ist  $1 - |x|$  positiv, ansonsten Null oder negativ. Da wir das Maximum suchen ist der erste Punkt schon gezeigt.

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - |x|) \cdot e^{-ikx} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (1 + x) \cdot e^{-ikx} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x) \cdot e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x)(e^{ikx} + e^{-ikx}) dx = \frac{1}{2} \frac{(1 - x)(e^{ikx} - e^{-ikx})}{ik} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(e^{ikx} - e^{-ikx})}{ik} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{(e^{ikx} - e^{-ikx})}{(ik)^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} \frac{2}{k^2} (\cos(k) - 1) \end{aligned}$$

b) (3 Punkte) Zeigen Sie dass die Fouriertransformierten der Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{für } x \in [0, \pi] \\ 0, & \text{für } sonst \end{cases} \quad g(x) = e^{-\frac{|x|}{\pi}}$$

existieren, indem Sie zeigen, dass das Integral von  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  (bzw.  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx$ ) endlich ist. Existiert auch die Fouriertransformierte von der Funktion  $f * g(x)$ ? Zeigen bzw. begründen Sie ihre Aussagen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\frac{|x|}{\pi}} \right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x|}{\pi}} dx = \int_{-\infty}^0 e^{\frac{x}{\pi}} dx + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\pi}} dx = 2\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx = \int_0^{\pi} 3 dx = 3\pi$$

Somit sind beide Integrale wohldefiniert und es existieren jeweils die Fouriertransformierten. Es existiert auch die Fouriertransformierte von der Funktion  $f * g$ , da  $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g} < \infty$ .