Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2016

# PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

## Test 1 Gruppe A (Mo, 25.04.2016) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| ↑ *FAMILIENNAME* | ↑ *Vorname* | ↑ *Studium / Matr.Nr.* |

| *1.* | *2.* | *3.* | *gesamt* |
|---|---|---|---|
| | | | |
| *Punkte* | | | *maximal 18* |

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

**Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textit{Kästchen}}$ eingetragenen Antworten.**

**Machen Sie sich zunächst Notizen,**
**und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!**

**Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.** •

- **Aufgabe 1.**

a ) (2 Punkte) Gegeben ist die folgende Fläche:

$$F = \left\{ \mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} y\sin(x) \\ y^2 \\ y\cos(x) \end{pmatrix},\ x \in [0,2\pi],\ y \in [0,4] \right\}.$$

Berechnen Sie den Maßtensor $M(x,y)$ und $\sqrt{\det\, M(x,y)}$.

Maßtensor:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \begin{pmatrix} y\cos(x) \\ 0 \\ -y\sin(x) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ 2y \\ \cos(x) \end{pmatrix},$$

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & 4y^2+1 \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{\det M(x,y)} = \sqrt{y^2\,(4y^2+1)}.$$

b ) (2 Punkte) Berechnen Sie den Normalvektor $\mathbf{n}(x, y)$ und seine Norm $\|\mathbf{n}(x, y)\|$.

Normalvektor:

$$\mathbf{n}(x,y) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} y\cos(x) \\ 0 \\ -y\sin(x) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin(x) \\ 2y \\ \cos(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^2\sin(x) \\ -y \\ 2y^2\cos(x) \end{pmatrix},$$

$$\|\mathbf{n}(x,y)\| = \sqrt{4y^4\sin^2(x) + y^2 + 4y^4\cos^2(x)} = \sqrt{y^2\,(4y^2+1)}.$$

c ) (2 Punkte) Berechnen Sie den Flächeninhalt von F.

Flächeninhalt:

$$A = \int_{x=0}^{2\pi}\int_{y=0}^{4} \sqrt{y^2\,(4y^2+1)}\,\mathrm{d}(x,y) = 2\pi \int_{y=0}^{4} y\sqrt{4y^2+1}\,\mathrm{d}y = \left| \begin{matrix} u = 4y^2+1 \\ \mathrm{d}u = 8y\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{8y} \end{matrix} \right| = \frac{\pi}{4}\int_{u=1}^{65} u^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{u=1}^{65} = \frac{\pi}{6}(\sqrt{65^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{\pi}{6}(65\sqrt{65} - 1)\,.$$

- **Aufgabe 2.**

(6 Punkte) Beweisen Sie, dass das Vektorfeld

$$\mathbf{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+y^2} - z \\[2ex] \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^2}} + z\cos(yz) \\[2ex] y\cos(yz) - x \end{pmatrix}$$

ein Gradientenfeld ist, d.h., ein Potential $\Phi(x,y,z)$ existiert mit $\mathbf{a} = \nabla\ \Phi$ . Berechnen Sie $\Phi$.

Definitionsbereich von $\mathbf{a}$ ist $\mathbb{R}^3$

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \cos(yz) - yz\sin(yz) - \cos(yz) + yz\cos(yz) \\ -(-1-(-1)) \\ \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} - \dfrac{2y}{2\sqrt{1+y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also ist das Feld wirbelfrei im $\mathbb{R}^3$. $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend $\Rightarrow \exists$ ein Potential.

Berechnung des Potentials:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+y^2} - z \quad \Rightarrow$$

$$U(x,y,z) = \int \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+y^2} - z \right) \mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x + x\sqrt{1+y^2} - xz = \begin{vmatrix} t = 1+x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \\ dx = \frac{1}{2x}\mathrm{d}t \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t + x\sqrt{1+y^2} - xz = \sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} - xz + C(y,z),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x \cdot 2y}{2\sqrt{1+y^2}} + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}} + z\cos(yz) \Rightarrow \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = z\cos(yz)$$

$$\Rightarrow C(y,z) = \int z\cos(yz)\mathrm{d}y = \int \cos(t)\mathrm{d}t = \sin(yz) + C(z)$$

$$\Rightarrow U = \sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} - xz + \sin(yz) + C(z),$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -x + y\cos(yz) + C'(z) = y\cos(yz) - x \Rightarrow C'(z) = 0 \Rightarrow C(z) = C,$$

Das gesuchte Potential ist $U(x, y, z) = \sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} - xz + \sin(yz) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

- **Aufgabe 3.**

a) (6 Punkt) Gegeben ist das Vektorfeld $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$. Berechnen Sie (ohne Verwendung des Satzes von Gauß) das Integral $\int_{\partial V} \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}S$. Dabei ist $\partial V$ der obere Teil des Ellipsoidoberfläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z > 0.$$

**Hinweis:** Zur Parametrisierung von $\partial V$ verwenden Sie die elliptisch angepassten Polarkoordinaten $x = a\,r\cos\varphi, \quad y = b\,r\sin\varphi$. Beachten Sie bei der Berechnung des Normalvektors die Form von $\mathbf{a}$.

Sei

$$\begin{matrix} x = a\,r\cos\varphi \\ y = b\,r\sin\varphi \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2, \quad \begin{matrix} 0 \le r \le 1, \\ 0, \le \varphi \le 2\pi, \end{matrix}$$

$$\Rightarrow r^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = c^2(1-r^2) \quad \Rightarrow \quad z = c\sqrt{(1-r^2)} \quad \text{da } z > 0.$$

$$\text{Parametrisierung:} \quad \sigma = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,r\cos\varphi \\ b\,r\sin\varphi \\ c\sqrt{(1-r^2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \le r \le 1, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{matrix}$$

$$\text{Normalvektor:} \quad \frac{\partial\sigma}{\partial r} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ b\sin\varphi \\ -\frac{cr}{\sqrt{1-r^2}} \end{pmatrix}, \ \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -a\,r\sin\varphi \\ b\,r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{n} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial r} \times \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\right).$$

Wir berechnen wegen der Form des Vektorfeldes nur die z-Komponente: $n_z = abr$.

$$\Rightarrow \int_{\partial V} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 z\,n_z\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi}\int_0^1 c\sqrt{1-r^2}\,abr\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r =$$

$$= 2\pi abc \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r = 2\pi abc \left.\frac{-(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}\pi abc.$$

Im letzten Integral wurde die Substitution $u := 1 - r^2$ durchgeführt.

b ) (Zusatz: 2 Punkte) Berechnen Sie mithilfe des Gaußschen Integralsatzes das Volumen des gesamten Ellipsoids.

$$V_E = \iiint\limits_E \mathrm{d}V = \iiint\limits_E \operatorname{div}\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix} \mathrm{d}V = \int\limits_{\partial E_{oben}} \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int\limits_{\partial E_{unten}} \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} =$$

$$= \frac{2}{3}\pi abc + \frac{2}{3}\pi abc = \frac{4}{3}\pi abc$$

Im zweiten Integral ist zwar $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}0\\0\\-c\sqrt{1-r^2}\end{pmatrix}$ aber $n_z = -abr$ und deshalb sind die Integrale über $\partial E_{oben}$ und $\partial E_{unten}$ gleich.