Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 1 Gruppe B (Mo, 25.04.2016) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. ••

- **Aufgabe 1.**

a) (6 Punkt) Gegeben ist das Vektorfeld $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}$. Berechnen Sie (ohne Verwendung des Satzes von Gauß) das Integral $\int_{\partial V} \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}S$. Dabei ist ∂V der untere Teil des Ellipsoidoberfläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z < 0.$$

Hinweis: Zur Parametrisierung von ∂V verwenden Sie die elliptisch angepassten Polarkoordinaten $x = a\,r\cos\varphi, \quad y = b\,r\sin\varphi$. Beachten Sie bei der Berechnung des Normalvektors die Form von $\mathbf{a}$.

Sei

$$\begin{aligned} x &= a\,r\cos\varphi \\ y &= b\,r\sin\varphi \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2, \quad \begin{aligned} 0 \le r \le 1, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = c^2(1-r^2) \quad \Rightarrow \quad z = -c\sqrt{(1-r^2)} \quad \text{da } z < 0.$$

$$\text{Parametrisierung:} \quad \sigma = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,r\cos\varphi \\ b\,r\sin\varphi \\ -c\sqrt{(1-r^2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} 0 \le r \le 1, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{aligned}$$

$$\text{Normalvektor:} \quad \frac{\partial\sigma}{\partial r} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ b\sin\varphi \\ \frac{cr}{\sqrt{1-r^2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -a\,r\sin\varphi \\ b\,r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{n} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial r} \times \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\right).$$

Wir berechnen wegen der Form des Vektorfeldes nur die z-Komponente: $n_z = -abr$.

ACHTUNG: Vektor muss nach außen zeigen, daher negativ!

$$\Rightarrow \int_{\partial V} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix} \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2z\,n_z\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 c\sqrt{1-r^2}\,abr\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r =$$

$$= 4\pi abc\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r = 4\pi abc\frac{-(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Im letzten Integral wurde die Substitution $u := 1 - r^2$ durchgeführt.

b) (Zusatz: 2 Punkte) Berechnen Sie mithilfe des Gaußschen Integralsatzes das Volumen des gesamten Ellipsoids.

$$V_E = \iiint\limits_E \mathrm{d}V = \iiint\limits_E \frac{1}{2}\mathrm{div}\begin{pmatrix}0\\0\\2z\end{pmatrix}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{\partial E_{oben}} \mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} + \int\limits_{\partial E_{unten}} \mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi abc + \frac{4}{3}\pi abc\right) = \frac{4}{3}\pi abc$$

Im zweiten Integral ist zwar $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}0\\0\\c\sqrt{1-r^2}\end{pmatrix}$ aber $n_z = abr$ und deshalb sind die Integrale über ∂E_{unten} und ∂E_{oben} gleich.

- **Aufgabe 2.**

a) (2 Punkte) Gegeben ist die folgende Fläche:

$$F = \left\{ \mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x\sin(y) \\ x^2 \\ x\cos(y) \end{pmatrix},\ x \in [0,4],\ y \in [0,2\pi] \right\}.$$

Berechnen Sie den Maßtensor $M(x,y)$ und $\sqrt{\det\ M(x,y)}$.

Maßtensor:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \sin(y) \\ 2x \\ \cos(y) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} x\cos(y) \\ 0 \\ -x\sin(y) \end{pmatrix},$$

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^2+1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{\det M(x,y)} = \sqrt{x^2\,(4x^2+1)}.$$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie den Normalvektor $\mathbf{n}(x,y)$ und seine Norm $\|\mathbf{n}(x,y)\|$.

Normalvektor:

$$\mathbf{n}(x,y) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \sin(y) \\ 2x \\ \cos(y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x\cos(y) \\ 0 \\ -x\sin(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2\sin(y) \\ x \\ 2x^2\cos(y) \end{pmatrix},$$

$$\|\mathbf{n}(x,y)\| = \sqrt{4x^4\sin^2(y) + x^2 + 4x^4\cos^2(y)} = \sqrt{x^2\,(4x^2+1)}.$$

c) (2 Punkte) Berechnen Sie den Flächeninhalt von F.

Flächeninhalt:

$$A = \int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{2\pi} \sqrt{x^2\,(4x^2+1)}\;\mathrm{d}(x,y) = 2\pi\int_{x=0}^{4} x\sqrt{4x^2+1}\;\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = 4x^2+1 \\ \mathrm{d}u = 8x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{8x} \end{matrix}\right| = \frac{\pi}{4}\int_{u=1}^{65} u^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{u=1}^{65} = \frac{\pi}{6}(\sqrt{65^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{\pi}{6}(65\sqrt{65} - 1)\,.$$

- **Aufgabe 3.**

(6 Punkte) Beweisen Sie, dass das Vektorfeld

$$\mathbf{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+y^2} + z \\[2ex] \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^2}} - z\sin(yz) \\[2ex] -y\sin(yz) + x \end{pmatrix}$$

ein Gradientenfeld ist, d.h., ein Potential $\Phi(x,y,z)$ existiert mit $\mathbf{a} = \nabla\,\Phi$. Berechnen Sie Φ.

Definitionsbereich von $\mathbf{a}$ ist $\mathbb{R}^3$

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\sin(yz) - yz\cos(yz) + \sin(yz) + yz\cos(yz) \\ -(1-(1)) \\ \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} - \dfrac{2y}{2\sqrt{1+y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also ist das Feld wirbelfrei im $\mathbb{R}^3$. $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend $\Rightarrow \exists$ ein Potential.

Berechnung des Potentials:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+y^2} + z \quad \Rightarrow$$

$$U(x,y,z) = \int \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+y^2} + z \right) \mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x + x\sqrt{1+y^2} + xz = \begin{vmatrix} t = 1+x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \\ dx = \frac{1}{2x}\mathrm{d}t \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t + x\sqrt{1+y^2} + xz = \sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} + xz + C(y,z),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x \cdot 2y}{2\sqrt{1+y^2}} + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}} - z\sin(yz) \Rightarrow \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = -z\sin(yz)$$

$$\Rightarrow C(y,z) = \int -z\sin(yz)\mathrm{d}y = -\int \sin(t)\mathrm{d}t = \cos(yz) + C(z)$$

$$\Rightarrow U = \sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} + xz + \cos(yz) + C(z),$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x - y\sin(yz) + C'(z) = -y\sin(yz) + x \Rightarrow C'(z) = 0 \Rightarrow C(z) = C,$$

Das gesuchte Potential ist $U(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2} + x\sqrt{1 + y^2} + xz + \cos(yz) + C$, $C \in \mathbb{R}$.