Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2016

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 2 Gruppe A (Mo, 13.06.2016) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

a) (1,5 Punkte) Geben sie die Euler-Lagrange Gleichung für folgendes Problem an

$$I[y] = \int_0^1 (y'^2 + 2yy' + 6x^2 y)\, dx \to \text{Min}$$

und lösen Sie anschließend das Randwertproblem mit $y(0) = y(1) = 1$.

Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

$$2y' + 6x^2 = \frac{\partial}{\partial x}(2y' + 2y)$$

$$2y' + 6x^2 = 2y'' + 2y' \iff y'' = 3x^2$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung

$$y(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax + b.$$

Zusammen mit den Randbedingungen erhält man als Lösung des Randwertproblems

$$y(x) = \frac{1}{4}(x^4 - x + 4)$$

b) (4,5 Punkte) Finden Sie jene Funktion $y(x)$, die das Integral

$$I[y] = \int_1^2 \left(\frac{4y^2}{x} + xy'^2\right)\, dx \to \text{Min}$$

unter den Nebenbedingungen $y(1) = y(2) = 0$ *und* $\int_1^2 y(x)dx = 1$ minimiert.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $y_h(x) = cx^n$, um zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Euler-Lagrange Gleichung zu finden und setzen Sie die Partikulärlösung als $y(x) = bx$ an.

$$h(x, y, y') = \frac{4y^2}{x} + xy'^2 + \lambda y$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) = \frac{\partial h}{\partial y} : \quad \frac{\partial h}{\partial y'} = 2xy' \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{8y}{x} + \lambda$$

$$2y' + 2xy'' = \frac{8y}{x} + \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad xy'' + y' - \frac{4y}{x} = \frac{\lambda}{2}$$

Ansatz für die homogene Lösung: $y_h = cx^n$

$$\begin{aligned} xn(n-1)x^{n-2}c + nx^{n-1}c - \frac{4cx^n}{x} &= 0 \\ n(n-1)x^{n-1}c + nx^{n-1}c - 4cx^{n-1} &= 0 \\ \Rightarrow n^2 - n + n - 4 = 0 \Rightarrow n &= \pm\, 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_h(x) = c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$$

Ansatz für die Partikulärlösung: $y_p = bx$

$$b - \frac{4bx}{x} - \frac{\lambda}{2} = 0 \Longrightarrow b = -\frac{\lambda}{6}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{\lambda}{6}x \quad \Rightarrow y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^{-2} - \frac{\lambda}{6}x$$

Setzt man nun in die Rand- und Nebenbedingungen ein erhält man:

$$\begin{array}{ll} y(1) = 0 & \Rightarrow c_1 = \frac{\lambda}{6} - c_2 \\ y(2) = 0 & \Rightarrow c_2 = \frac{4}{45}\lambda \end{array}$$

$$\int_1^2 y(x)dx = \int_1^2 (\frac{\lambda}{6} - c_2)x^2 + c_2 x^{-2} - \frac{15}{8}c_2 x =$$

$$= \int_1^2 \frac{7}{8}c_2 x^2 + c_2 x^{-2} - \frac{15}{8}c_2 x = -\frac{13}{48}c_2 = 1$$

$$\rightarrow c_2 = -\frac{48}{13} \quad \lambda = -\frac{540}{13} \quad c_1 = -\frac{42}{13}$$

$$y(x) = -\frac{42}{13}x^2 - \frac{48}{13}x^{-2} - \frac{90}{13}x$$

- **Aufgabe 2.**

a) (2,5 Punkte) Bestimmen Sie eine Fundamentallösung von

$$(\mathcal{L}u)(t) = u''(t) - \lambda^2 u(t), \quad \lambda > 0$$

die die Standardbedingungen erfüllt und auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $u(t) = e^{\mu t}$.

Wir lösen $u'' - \lambda^2 u = 0$ mithilfe des charakteristischen Polynoms $\mu^2 - \lambda^2$. Damit lautet die allgemeine Lösung $u = A\exp(\lambda t) + B\exp(-\lambda t)$. Für die Fundamentallösung machen wir den Ansatz

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} A_- \exp(\lambda t) + B_- \exp(-\lambda t) & t < 0 \\ A_+ \exp(\lambda t) + B_+ \exp(-\lambda t) & t > 0 \end{cases}$$

Für die Beschränktheit muss gelten: $B_- = A_+ = 0$.
Wir fordern die Stetigkeit von $\mathcal{U}$ und einen Sprung von $\mathcal{U}'$ bei 0 der Höhe 1:

$$\begin{aligned} A_- &= B_+ \\ -\lambda(A_- + B_+) &= 1. \end{aligned}$$

Damit folgt $A_- = B_+ = -\frac{1}{2\lambda}$ und die Fundamentallösung lautet

$$\mathcal{U}(t) = -\frac{1}{2\lambda}\exp(-\lambda|t|) = \begin{cases} -\frac{1}{2\lambda}\exp(\lambda t) & t < 0 \\ -\frac{1}{2\lambda}\exp(-\lambda t) & t > 0 \end{cases}$$

b) (0,5 Punkte) Geben Sie den Ansatz zur Lösung von

$$(\mathcal{L}u)(t) = u''(t) - \lambda^2 u(t) = \sin(\lambda t) \tag{1}$$

mithilfe der in a) erhaltenen Fundamentallösung an.

Es gilt $u = \mathcal{U} * f$, damit

$$u(t) = -\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2\lambda}\exp(\lambda s)\sin(\lambda(t-s))ds - \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\lambda}\exp(-\lambda s)\sin(\lambda(t-s))ds$$

c) (3 Punkte) Führen Sie den in b) erhaltenen Ansatz aus und bestimmen Sie eine Lösung von (1).

Hinweise: $\int e^{c\xi}\sin(b\xi)d\xi = \frac{e^{c\xi}}{c^2+b^2}(c\sin(b\xi) - b\cos(b\xi))$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass

$$\lim_{t\to+\infty}\exp(-t)\sin(t) = \lim_{t\to+\infty}\exp(-t)\cos(t) = 0.$$

Wir integrieren:

$$\begin{aligned}
-u_-(t) &= \int_{-\infty}^{0}\exp(\lambda s)\sin(\lambda(t-s))ds \\
&= \frac{1}{\lambda}\exp(\lambda s)\sin(\lambda(t-s))\Big|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0}\exp(\lambda s)\cos(\lambda(t-s))ds \\
&= \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda t) + \frac{1}{\lambda}\exp(\lambda s)\cos(\lambda(t-s))\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}\exp(\lambda s)\sin(\lambda(t-s))ds \\
&= \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda t) + \frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t) + u_-(t)
\end{aligned}$$

Damit folgt $u_-(t) = -\frac{1}{2\lambda}(\sin(\lambda t) + \cos(\lambda t))$.
Für $u_+(t) = -\int_{-\infty}^{0}\exp(\lambda s)\sin(\lambda(t-s))ds$ folgt analog $u_+(t) = -\frac{1}{2\lambda}(\sin(\lambda t) - \cos(\lambda t))$.
Insgesamt ergibt sich dadurch als Lösung

$$u(t) = -\frac{1}{2\lambda^2}\sin(\lambda t).$$

- **Aufgabe 3.**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie ohne Verwendung von b), dass die Fourier- Transformierte der Funktion $f(x) = (4 + 2x)e^{-|x|}$ existiert, d.h., zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, \mathrm{d}x < \infty$ gilt.

Hinweis: $\displaystyle\int x\, e^{ax} dx = \frac{x}{a} e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax}$, für $a = const.$

Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, \mathrm{d}x$ so existriert die Fourier- Transformierte $\hat{f}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|(4+2x)e^{-|x|}\right| \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |(4+2x)|\, e^{-|x|} \mathrm{d}x =$$

$$\int_{-\infty}^{-2} -(4+2x)e^{x} \mathrm{d}x + \int_{-2}^{0} (4+2x)e^{x} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} (4+2x)e^{-x} \mathrm{d}x =$$

$$-(4+2x)e^{x}\Big|_{-\infty}^{-2} + 2e^{x}\Big|_{-\infty}^{-2} + (4+2x)e^{x}\Big|_{-2}^{0} - 2e^{x}\Big|_{-2}^{0} + -(4+2x)e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} - 2e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} =$$

$$0 + 2e^{-2} + 4 - 2 + 2e^{-2} + 4 + 2 =$$

$$= 8 + 4e^{-2}$$

b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $f(x) = (4+2x)e^{-|x|}$.

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} (4+2x)e^{-|x|}e^{-ikx}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} (4+2x)e^{x}e^{-ikx}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} (4+2x)e^{-x}e^{-ikx}\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-\infty}^{0} (4+2x)e^{(1-ik)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} (4+2x)e^{-(1+ik)x}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{(4+2x)}{(1-ik)}e^{(1-ik)x}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{2}{(1-ik)^2}e^{(1-ik)x}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{(4+2x)}{(1+ik)}e^{-(1+ik)x}\Big|_{0}^{\infty} - \frac{2}{(1+ik)^2}e^{-(1+ik)x}\Big|_{0}^{\infty} =$$

$$\frac{4}{(1-ik)} - \frac{2}{(1-ik)^2} + \frac{4}{(1+ik)} + \frac{2}{(1+ik)^2} =$$

$$= \frac{8(k^2 - ik + 1)}{(k^2+1)^2}$$