Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2016

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 2 Gruppe B (Mo, 13.06.2016) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textit{Kästchen}}$ eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. ••

- **Aufgabe 1.**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie ohne Verwendung von b), dass die Fourier-Transformierte der Funktion $f(x) = (6+3x)e^{-|x|}$ existiert, d.h., zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ gilt.

Hinweis: $\displaystyle\int x\,e^{ax}dx = \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}$, für $a = const.$

Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ so existriert die Fourier-Transformierte $\hat{f}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|(6+3x)e^{-|x|}\right| \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |(6+3x)|\, e^{-|x|}\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-\infty}^{-2} -(6+3x)e^{x}\mathrm{d}x + \int_{-2}^{0} (6+3x)e^{x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} (6+3x)e^{-x}\mathrm{d}x =$$

$$-(6+3x)e^{x}\big|_{-\infty}^{-2} + 2e^{x}\big|_{-\infty}^{-2} + (6+3x)e^{x}\big|_{-2}^{0} - 2e^{x}\big|_{-2}^{0} + -(6+3x)e^{-x}\big|_{0}^{\infty} - 2e^{-x}\big|_{0}^{\infty} =$$

$$0 + 3e^{-2} + 6 - 3 + 3e^{-2} + 6 + 3 =$$

$$= 12 + 6e^{-2}$$

b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $f(x) = (6+3x)e^{-|x|}$.

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} (6+3x)e^{-|x|}e^{-ikx}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} (6+3x)e^{x}e^{-ikx}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} (6+3x)e^{-x}e^{-ikx}\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-\infty}^{0} (6+3x)e^{(1-ik)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} (6+3x)e^{-(1+ik)x}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{(6+3x)}{(1-ik)}e^{(1-ik)x}\bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{3}{(1-ik)^2}e^{(1-ik)x}\bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{(6+3x)}{(1+ik)}e^{-(1+ik)x}\bigg|_{0}^{\infty} - \frac{3}{(1+ik)^2}e^{-(1+ik)x}\bigg|_{0}^{\infty} =$$

$$\frac{6}{(1-ik)} - \frac{3}{(1-ik)^2} + \frac{6}{(1+ik)} + \frac{3}{(1+ik)^2} =$$

$$= \frac{12(k^2 - ik + 1)}{(k^2+1)^2}$$

- **Aufgabe 2.**

a) (1,5 Punkte) Geben sie die Euler-Lagrange Gleichung für folgendes Problem an

$$I[y] = \int_0^2 (3y'^2 + 6yy' + 3x^2 y)\; dx \to \text{Min}$$

und lösen Sie anschließend das Randwertproblem mit $y(0) = y(1) = 0$.

Euler-Lagrange Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

$$6y' + 3x^2 \;=\; \frac{\partial}{\partial x}(6y' + 6y)$$

$$6y' + 3x^2 \;=\; 6y'' + 6y' \iff y'' \;=\; \frac{1}{2}x^2$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$y(x) = \frac{1}{24}x^4 + ax + b.$$

Zusammen mit den Randbedingungen erhält man als Lösung des Randwertproblems

$$y(x) = \frac{1}{24}\,(x^4 - x)$$

b) (4,5 Punkte) Finden Sie jene Funktion $y(x)$, die das Integral

$$I[y] = \int_1^2 \left(\frac{32y^2}{x} + 2xy'^2\right)\; dx \to \text{Min}$$

unter den Nebenbedingungen $y(1) = y(2) = 0$ *und* $\int_1^2 2y(x)dx = 1$ minimiert.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $y_h(x) = cx^n$*, um zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Euler-Lagrange Gleichung zu finden.*

$$h(x, y, y') = \frac{32y^2}{x} + 2xy'^2 + \lambda 2y$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) = \frac{\partial h}{\partial y} : \quad \frac{\partial h}{\partial y'} = 4xy' \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{64y}{x} + 2\lambda$$

$$4y' + 4xy'' = \frac{64y}{x} + 2\lambda \iff xy'' + y' - \frac{16y}{x} = \frac{\lambda}{2}$$

Ansatz für die homogene Lösung: $y_h = cx^n$

$$\begin{aligned} xn(n-1)x^{n-2}c + nx^{n-1}c - \frac{16cx^n}{x} &= 0 \\ n(n-1)x^{n-1}c + nx^{n-1}c - 16cx^{n-1} &= 0 \\ \Rightarrow n^2 - n + n - 16 = 0 \Rightarrow n &= \pm\, 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_h(x) = c_1 x^4 + c_2 x^{-4}$$

Ansatz für die Partikulärlösung: $y_p = bx$

$$b - \frac{16bx}{x} - \frac{\lambda}{2} = 0 \Longrightarrow b = -\frac{\lambda}{30}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{\lambda}{30}x \quad \Rightarrow y(x) = c_1 x^4 + c_2 x^{-4} - \frac{\lambda}{30}x$$

Setzt man nun in die Rand- und Nebenbedingungen ein erhält man:

$$y(1) = 0 \quad \Rightarrow c_1 = \tfrac{\lambda}{30} - c_2$$

$$y(2) = 0 \quad \Rightarrow c_2 = \tfrac{112}{3825}\lambda$$

$$\int_1^2 2y(x)dx = 2\int_1^2 (\frac{\lambda}{30} - c_2)x^4 + c_2 x^{-4} - \frac{56}{57375}c_2 x =$$

$$= 2\int_1^2 \frac{-57319}{57375}c_2 x^4 + c_2 x^{-4} - \frac{56}{57375}c_2 x \approx -11,81 c_2 = 1$$

$$\to c_2 \approx -0,085 \quad \lambda \approx -0,29 \quad c_1 \approx -0.094$$

$$y(x) \approx -0.094x^4 - 0,085x^{-4} - 0,29x$$

- **Aufgabe 3.**

a) (2,5 Punkte) Bestimmen Sie eine Fundamentallösung von

$$(\mathcal{L}u)(t) = \mu^2 u(t) - u''(t), \quad \mu > 0$$

die die Standardbedingungen erfüllt und auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$.

Wir lösen $u'' - \mu^2 u = 0$ mithilfe des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 - \mu^2$. Damit lautet die allgemeine Lösung $u = A\exp(\mu t) + B\exp(-\mu t)$. Für die Fundamentallösung machen wir den Ansatz

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} A_- \exp(\mu t) + B_- \exp(-\mu t) & t < 0 \\ A_+ \exp(\mu t) + B_+ \exp(-\mu t) & t > 0 \end{cases}$$

Für die Beschränktheit muss gelten: $B_- = A_+ = 0$.
Wir fordern die Stetigkeit von $\mathcal{U}$ und einen Sprung von $\mathcal{U}'$ bei 0 der Höhe 1:

$$\begin{aligned} A_- &= B_+ \\ -\mu(A_- + B_+) &= 1. \end{aligned}$$

Damit folgt $A_- = B_+ = -\frac{1}{2\mu}$ und die Fundamentallösung lautet

$$\mathcal{U}(t) = -\frac{1}{2\mu}\exp(-\mu|t|) = \begin{cases} -\frac{1}{2\mu}\exp(\mu t) & t < 0 \\ -\frac{1}{2\mu}\exp(-\mu t) & t > 0 \end{cases}$$

b) (0,5 Punkte) Geben Sie den Ansatz zur Lösung von

$$(\mathcal{L}u)(t) = \mu^2 u(t) - u''(t) = \cos(\mu t) \tag{1}$$

mithilfe der in a) erhaltenen Fundamentallösung an.

Es gilt $u = \mathcal{U} * f$, damit

$$u(t) = -\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2\mu}\exp(\mu s)\cos(\mu(t-s))ds - \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\mu}\exp(-\mu s)\cos(\mu(t-s))ds$$

c) (3 Punkte) Führen Sie den in b) erhaltenen Ansatz aus und bestimmen Sie eine Lösung von (1).

Hinweise: Es gilt

$$\int e^{c\xi}\cos(b\xi)d\xi = \frac{e^{c\xi}}{c^2+b^2}(c\cos(b\xi) - b\sin(b\xi)).$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass

$$\lim_{t\to+\infty}\exp(-t)\sin(t) = \lim_{t\to+\infty}\exp(-t)\cos(t) = 0$$

gilt.

Wir integrieren:

$$\begin{aligned}
-u_-(t) &= \int_{-\infty}^{0} \exp(\mu s)\cos(\mu(t-s))ds \\
&= \frac{1}{\mu}\exp(\mu s)\cos(\mu(t-s))\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}\exp(\mu s)\sin(\mu(t-s))ds \\
&= \frac{1}{\mu}\cos(\mu t) - \frac{1}{\mu}\exp(\mu s)\sin(\mu(t-s))\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}\exp(\mu s)\cos(\mu(t-s))ds \\
&= -\frac{1}{\mu}\sin(\mu t) + \frac{1}{\mu}\cos(\mu t) + u_-(t)
\end{aligned}$$

Damit folgt $u_-(t) = -\frac{1}{2\mu}(\cos(\mu t) - \sin(\mu t))$.
Für $u_+(t) = -\int_{-\infty}^{0}\exp(\mu s)\cos(\mu(t-s))ds$ folgt analog $u_+(t) = -\frac{1}{2\mu}(\sin(\mu t) + \cos(\mu t))$.
Insgesamt ergibt sich dadurch als Lösung

$$u(t) = -\frac{1}{2\mu^2}\cos(\mu t).$$