

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 1 Gruppe B (Mo, 24.04.2017) (mit Lösung)

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 2.** Ein einschaliges Hyperboloid ist durch

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\}$$

gegeben. Wählen Sie $a = b = c = 3$ und verwenden Sie die Parametrisierung:

$$r : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s, t) \mapsto \begin{pmatrix} a \cdot \cosh(s) \cdot \cos(t) \\ b \cdot \sinh(s) \\ c \cdot \cosh(s) \cdot \sin(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- a) (1,5 Punkte) Für welche $(s, t) \in B$ ist F eine reguläre Fläche? Begründen Sie!

$r(s, t)$ ist als Produkt stetig differenzierbarer Funktionen selbst wiederum stetig differenzierbar. Die Vektoren

$$\frac{\partial r}{\partial s} = 3 \cdot \begin{pmatrix} \sinh(s) \cdot \cos(t) \\ \cosh(s) \\ \sinh(s) \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -\cosh(s) \cdot \sin(t) \\ 0 \\ \cosh(s) \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$$

sind offensichtlich für alle $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig, da $\cosh(s) \neq 0$ für alle s in \mathbb{R} . Eine injektive Parametrisierung wäre etwa auf $B = \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ gegeben.

- b) (1,5 Punkte) Berechnen Sie den Maßtensor von F !

Mit den oben berechneten Vektoren erhält man sofort:

$$M(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} & \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} \\ \frac{\partial r}{\partial t} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} & \frac{\partial r}{\partial t} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \cdot (\sinh^2(s) + \cosh^2(s)) & 0 \\ 0 & 9 \cdot \cosh^2(s) \end{pmatrix}$$

c) (3 Punkte) Berechnen Sie mithilfe des Maßensors die Fläche von

$$F = \{r(s, t) \mid (s, t) \in [-1, 0] \times [-\pi, 0]\}$$

Hinweis: Substituieren sie gegebenenfalls geeignet. Sie dürfen außerdem das folgende Integral verwenden:

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot x + \operatorname{arsinh}(x)$$

Es gilt:

$$\int_F dS = \int_{(s,t) \in [0,1] \times [0,\pi]} \sqrt{\det(M(s,t))} d(s,t) = \int_{s=0}^1 \int_{t=0}^{\pi} 9 \cdot \sqrt{1+2 \cdot \sinh^2(s)} \cdot \cosh(s) ds dt$$

wobei die Identität $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ verwendet wurde.

Mit der Substitution $z = \sqrt{2} \cdot \sinh(s)$ erhält man:

$$\begin{aligned} \int_F dS &= \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot \int_{z=\sqrt{2} \cdot \sinh(-1)}^0 \sqrt{1+z^2} dz \cdot \int_{v=-\pi}^0 1 \cdot dv \\ &= -\frac{9 \cdot \pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{1+2 \cdot \sinh^2(-1)} \cdot \sqrt{2} \cdot \sinh(-1) + \operatorname{arsinh}(\sqrt{2} \cdot \sinh(-1)) \right) \\ &= -\frac{9 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{1+2 \cdot \sinh^2(-1)} \cdot \sqrt{2} \cdot \sinh(-1) + \operatorname{arsinh}(\sqrt{2} \cdot \sinh(-1)) \right) \end{aligned}$$

Da $\sinh(x)$ eine ungerade Funktion ist, gilt: $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned} &= \frac{9 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi}{4} \cdot \left(\sqrt{1+2 \cdot \sinh^2(1)} \cdot \sqrt{2} \cdot \sinh(1) + \operatorname{arsinh}(\sqrt{2} \cdot \sinh(1)) \right) \\ &\approx 45.03 \end{aligned}$$

Die Berechnung des numerischen Wertes ist nicht erforderlich, um volle Punktezahl zu erreichen.

• **Aufgabe 2.**

a) (5 Punkte) Berechnen Sie explizit durch Integration das Flussintegral des Vektorfelds

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

durch den Rand von $V : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z, 0 \leq x \leq 4, y^2 + z^2 \leq 3^2\}$.

Hinweis:

Überlegen Sie zuerst, welche 2 Flächen des Rands von V keinen Beitrag zum Flussintegral liefern.

Das Volumen V ist die obere Hälfte eines liegenden Zylinders mit Radius $R = 3$ und Länge $L = 4$. Der Rand von V besteht aus vier Flächen: 1) der Zylindermantelfläche, 2) der Bodenfläche, 3) der Frontseite ($x = L$) und 4) der Rückseite ($x = 0$).

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} v \cdot dS &= \\ &= \int_{\text{Zylindermantel}} v \cdot dS_{\text{Zylindermantel}} + \int_{\text{Boden}} v \cdot dS_{\text{Boden}} + \int_{\text{Front}} v \cdot dS_{\text{Front}} + \int_{\text{Rück}} v \cdot dS_{\text{Rück}} \end{aligned}$$

Die Flächenelemente dS ergeben sich durch Parametrisierung in Zylinder- (S_1), kartesischen- (S_2), bzw. Polarkoordinaten (S_3 und S_4):

$$dS_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \cos \phi \\ R \sin \phi \end{pmatrix} \cdot d(y, \phi)$$

$$dS_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot d(x, y)$$

$$dS_3 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d(r, \phi)$$

$$dS_4 = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d(r, \phi)$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_1} v \, dS_1 &= \int_{S_1} \begin{pmatrix} -x \\ R \cos \phi \\ R \sin \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ R \cos \phi \\ R \sin \phi \end{pmatrix} \cdot d(x, \phi) = \int_0^\pi \int_0^L R^2 \underbrace{(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi))}_{=1} \, dx \, d\phi \\
&= R^2 \pi L \\
\int_{S_2} v \, dS_2 &= \int_{S_2} \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot d(x, y) = 0 \\
\int_{S_3} v \, dS_3 &= \int_{S_3} \begin{pmatrix} -L \\ r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d(r, \phi) = \int_0^\pi \int_0^R -Lr \, dr \, d\phi = -\frac{1}{2} R^2 \pi L \\
\int_{S_4} v \, dS_4 &= \int_{S_4} \begin{pmatrix} -0 \\ r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d(r, \phi) = 0 \\
\int_{\partial V} v \cdot dS &= \frac{1}{2} R^2 \pi L
\end{aligned}$$

- b) (1 Punkt) Verifizieren Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß, dass das Volumen des halben Zylinders 18π beträgt.

Da gilt: $\operatorname{div} v = 1$

$$\int_{\partial V} v \, dS = \int_V \operatorname{div} v \, dV = \int_V dV = \frac{1}{2} R^2 \pi L = 18\pi .$$

• Aufgabe 3.

a) (1,5 Punkte) Folgendes Vektorfeld beschreibt eine Kreiszyylinderströmung:

$$\mathbf{a}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin 2\varphi}{r^2} \\ 3 + \frac{\cos 2\varphi}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\mathbf{a}(r, \varphi, z)$ in kartesischen Koordinaten folgende Gestalt hat:

$$\mathbf{b}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ 3 + \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis: $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$

$$-\frac{\sin 2\varphi}{r^2} = -\frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$3 + \frac{\cos 2\varphi}{r^2} = 3 + \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{r^2} = 3 + \frac{\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}}{r^2} = 3 + \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

b) (1,5 Punkte) Untersuchen Sie das Vektorfeld $\mathbf{b}(x, y, z)$ auf Quellenfreiheit.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{b} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(3 + \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \\ &= \frac{-2y(x^2 + y^2)^2 + 2xy2(x^2 + y^2)2x}{(x^2 + y^2)^4} + \frac{-2y(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)2(x^2 + y^2)2y}{(x^2 + y^2)^4} = \\ &= \frac{-2y(x^2 + y^2) + 8x^2y + -2y(x^2 + y^2) - 4yx^2 + 4y^3}{(x^2 + y^2)^3} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-4y^3 - 4x^2y + 4x^2y + 4y^3}{(x^2 + y^2)^3} = 0$$

Das Vektorfeld $\mathbf{b}(x, y, z)$ ist somit quellenfrei!

c) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass das Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y, z)$

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin x \cos y \cos z \\ \cos x \sin y \cos z \\ \cos x \cos y \sin z \end{pmatrix}$$

ein Gradientenfeld ist, d.h., ein Potential $\Phi(x, y, z)$ existiert mit $\mathbf{f} = \nabla \Phi$. Berechnen Sie $\Phi(x, y, z)$, wobei das Potenzialfeld die Bedingung $\Phi(\pi, 0, 0) = 2$ erfüllen muss.

Definitionsbereich von \mathbf{f} ist \mathbb{R}^3

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\cos x \sin y \sin z + \cos x \sin y \sin z \\ +\sin x \cos y \sin z - \sin x \cos y \sin z \\ -\sin x \sin y \cos z - \sin x \sin y \cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also ist das Feld wirbelfrei im \mathbb{R}^3 . \mathbb{R}^3 ist einfach zusammenhängend $\Rightarrow \exists$ ein Potential.

Berechnung des Potentials:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sin x \cos y \cos z \Rightarrow \Phi(x, y, z) = -\cos x \cos y \cos z + A(y, z)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \cos x \sin y \cos z = \cos x \sin y \cos z + \frac{\partial A}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial y} = 0, \quad A(y, z) = B(z)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \cos x \cos y \sin z = \cos x \cos y \sin z + B'(z) \Rightarrow B'(z) = 0, \quad B(z) = c$$

$$\Phi(x, y, z) = -\cos x \cos y \cos z + c$$

Mit obiger Bedingung ergibt sich

$$\Phi(x, y, z) = \cos x \cos y \cos z + 1$$