Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2017

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 2 Gruppe A (Fr, 16.06.2017) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textbf{\textit{Kästchen}}}$ **eingetragenen Antworten.**

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

Gegeben sei das Funktional

$$I[y] := \int_0^1 \big(-4xyy' + 2x^2(y')^2 + 3y + \sin(x)\cos(x)\big)\, dx$$

Finden Sie jene Funktion, die $I[y]$ unter der Nebenbedingung

$$\varphi[y] := \int_0^1 (2xy' + 3y)\, dx = 2\sqrt{5} - 12$$

und den Randbedingungen

$$y(0) = y(1) = -4$$

minimiert.

a) (2,5 Punkte) Führen Sie die Lösung dieses Problems mit der Methode der Lagrange Multiplikatoren auf die Lösung einer Differentialgleichung zurück.

Im Folgenden sei, analog zum Skriptum, der Integrand des zu minimierenden Integrals mit $f(x, y, y')$ und jener der Nebenbedingung mit $g(x, y, y')$ bezeichnet.
Wir definieren die Hilfsfunktion:

$$h(x, y, y') := f(x, y, y') + \lambda \cdot g(x, y, y')$$

$$h(x, y, y') = -4xyy' + 2x^2(y')^2 + 3y + \sin(x)\cos(x) + \lambda \cdot (2xy' + 3y)$$

Wir berechnen:

$$\frac{\partial h(x, y, y')}{\partial y} = -4xy' + 3 + 3\lambda \tag{1}$$

$$\frac{\partial h(x, y, y')}{\partial y'} = -4xy + 4x^2y' + 2\lambda x \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h(x, y, y')}{\partial y'}\right) = -4y - 4xy' + 8xy' + 4x^2y'' + 2\lambda \tag{3}$$

und setzen (1)-(3) in die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h(x, y, y')}{\partial y'}\right) = \frac{\partial h}{\partial y}$$

ein und erhalten:

$$4x^2y'' + 8xy' - 4y = 3 + \lambda \tag{4}$$

b) (3,5 Punkte) Lösen Sie die hergeleitete Differentialgleichung allgemein durch Wahl der passenden Ansätze für die allgemeine Lösung der homogenen und für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$4x^2y'' + 8xy' - 4y = 0 \tag{5}$$

durch Wahl des Ansatzes: $y(x) := K \cdot x^n$.
Ableiten ergibt:

$$y'(x) = Knx^{n-1} \tag{6}$$

$$y'' = Kn(n-1)x^{n-2} \tag{7}$$

Einsetzen von (6) und (7) in (5) liefert:

$$\left(4n^2 + 4n - 4\right) Kx^n = 0$$

Dies muss für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten, also:

$$n^2 + n - 1 \stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y_h(x) = Ax^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + Bx^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \tag{8}$$

Für die Partikulärlösung von (4) wird aufgrund der Gestalt der Inhomogenität der Ansatz

$$y_p(x) = a \ \Rightarrow y_p'(x) = y_p''(x) = 0$$

gewählt.

Damit folgt:

$$-4a = 3 + y \ \Rightarrow a = -\frac{3+\lambda}{4} \ \Rightarrow y_p(x) = -\frac{3+\lambda}{4}$$

Somit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y(x) = Ax^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + Bx^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} - \frac{3+\lambda}{4} \tag{9}$$

c) (0 Punkte) Finden Sie nun jene Funktion, die $I[y]$ unter den gegebenen Neben- und Randbedingungen minimiert.

Unter Verwendung der ersten Randbedingung erhält man,

$$y(0) = -4 = A \cdot 0 + B \cdot \lim_{x \to 0} x^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{4}(3 + \lambda).$$

Damit $y(x)$ beschränkt bleibt, muss man $B = 0$ wählen und somit legt die erste Randbedingung zwei (!!!) Konstante fest, $B = 0$ und $\lambda = 13$. Das ist i.A. natürlich nicht der Fall.
Die zweite Randbedingung liefert

$$y(1) = -4 = A - \frac{1}{4}(3 + 13) \ \Rightarrow A = 0$$

und die Lösung lautet:

$$y(x) = -4.$$

Diese Lösung erfüllt zwar die RBen aber nicht die NB. Mit $y'(x) = 0$ folgt

$$\int_0^1 (2xy' + 3y)\, dx = \int_0^1 3 \cdot (-4) dx = -12 \neq 2\sqrt{5} - 12.$$

D.h., die obige Lösung erfüllt die RBen aber nicht die NB.
Eine Lösung, die die Originalaufgabe löst existiert nicht.

- **Aufgabe 2.**

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\widehat{(f*g)}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$.

$$\widehat{(f*g)}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x$$

Unter Verwendung von $y = x - \xi \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(y+\xi)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}\xi\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\,\mathrm{d}y\right) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)\ .$$

b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Funktion $s(x)$ durch Fourier-Rücktransformation von

$$\hat{s}(k) = r(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |k| \leq 1 \\ 0 & |k| > 1 \end{cases}\ .$$

Hinweis: $\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = \sin(x)$

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{i}x}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right)_{-1}^{1} \\ \text{mit Hinweis:} &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{x}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(x)}{x} \\ \text{ohne Hinweis:} &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{x}\frac{1}{2\mathrm{i}}(\cos x + \mathrm{i}\sin x - (\cos x - \mathrm{i}\sin x)) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{x}\frac{2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\sin x = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(x)}{x} \end{aligned}$$

c) (4 Punkte) $y(x)$ sei durch die Integralgleichung

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi} \cdot \mathrm{e}^{-|x-\xi|} \, \mathrm{d}\xi$$

gegeben. Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $\hat{y}(k)$ und geben Sie $y(x)$ in Form eines bestimmten Integrals an. Verwenden Sie dazu die Ergebnisse aus a) und b)!

Man erkennt, dass das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi} \cdot \mathrm{e}^{-|x-\xi|} \, \mathrm{d}\xi$ die Faltung der Funktionen $\frac{\sin(x)}{x}$ und $\mathrm{e}^{-|x|}$ ist. In a) wurde gezeigt, dass die Fouriertransformierte der Faltung das Produkt der gefalteten Funktionen ist:

$$\hat{y}(k) = \widehat{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi} \cdot \mathrm{e}^{-|x-\xi|} \, \mathrm{d}\xi\right)} = \widehat{\frac{\sin(x)}{x}} \cdot \widehat{\mathrm{e}^{-|x|}} \; .$$

Aus b) ist bekannt, dass $\frac{1}{2\pi} \frac{\sin(x)}{x}$ die Fourier-Rücktransformierte von $r(k)$ ist. Daher gilt auch

$$\widehat{\frac{\sin(x)}{x}} = 2\pi r(k) \; .$$

Weiters muss die Fouriertransformierte von $\mathrm{e}^{-|x|}$ bestimmt werden:

$$\widehat{\mathrm{e}^{-|x|}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|x|} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x(1-\mathrm{i}k)} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x(1+\mathrm{i}k)} \, \mathrm{d}x \; .$$

Es gilt $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x(1-\mathrm{i}k)} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x(1+\mathrm{i}k)} = 0$. Daher ist

$$\widehat{\mathrm{e}^{-|x|}} = \frac{1}{1-\mathrm{i}k}(1-0) + \frac{1}{1+\mathrm{i}k}(0+1) = \frac{1+\mathrm{i}k+1-\mathrm{i}k}{(1-\mathrm{i}k)(1+\mathrm{i}k)} = \frac{2}{1+k^2} \; .$$

Mit diesen Ergebnissen erhält man die Fouriertransformierte von $y(x)$ zu

$$\hat{y}(k) = 2\pi r(k) \frac{2}{1+k^2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1+k^2} & |k| \leq 1 \\ 0 & |k| > 1 \end{cases} \; .$$

Um $y(x)$ zu bestimmen wenden wir die Inversionsformel an:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}k = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{1+k^2} \, \mathrm{d}k \; .$$

Dies ist eine Darstellung von $y(x)$ in Form eines bestimmten Integrals und muss nicht weiter gelöst werden.

• **Aufgabe 3.** Ein homogener, dünner Stab der Länge L habe zum Zeitpunkt $t = 0$ eine konstante Temperatur T_0. Nun wird der Stab am linken Ende mit einem Wärmereservoir der Temperatur T_1, sowie am rechten Ende mit einem Reservoir der Temperatur T_2 verbunden.
Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung für die Temperatur $u(x,t)$ an der Stelle x: $0 \leq x \leq L$ zum Zeitpunkt $t > 0$ lautet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \quad u(x,0) = T_0 \ .$$

a) (1 Punkt) Geben Sie die stationäre Lösung $u_{\text{stat}}(x)$ an.

$$\frac{\partial u_{\text{stat}}}{\partial t} = 0 = D\frac{\partial^2 u_{\text{stat}}}{\partial x^2} \Rightarrow u_{\text{stat}} = ax + b \ .$$

Die Koeffizienten a und b ergeben sich aus den Randbedingungen $u_{\text{stat}}(0) = T_1 = b$ und $u_{\text{stat}}(L) = T_2 = aL + T_1 \ \Rightarrow \ a = \frac{T_2 - T_1}{L}$.

$$u_{\text{stat}}(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$$

b) (5 Punkte) Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung für die angepasste Funktion $v(x,t) = u(x,t) - u_{\text{stat}}(x)$ unter den entsprechenden Rand- und Anfangsbedingungen für $v(x,t)$.
Hinweise:
$\int_0^L \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = \delta_{jk}\frac{L}{2}$,
$\int_0^L x\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{L^2}{k\pi}(-1)^{k+1}$.

Es gilt für $v(x,t) = u(x,t) - u_{\text{stat}}(x)$ wegen $\frac{\partial u_{\text{stat}}}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial^2 u_{\text{stat}}}{\partial x^2} = 0$ die gleiche Wärmeleitungsgleichung wie für $u(x,t)$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} v(0,t) = v(L,t) &= 0 \\ v(x,0) &= T_0 - u_{\text{stat}}(x) = (T_0 - T_1) + \left(\frac{T_1 - T_2}{L}\right)x \ . \end{aligned}$$

Wir machen den Separationsansatz $v(x,t) = X(x)T(t)$ und erhalten nach Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung

$$X\dot{T} = DX''T \ \Rightarrow \ D\frac{X''}{X} = \frac{\dot{T}}{T} = \lambda < 0 \ .$$

Mit der Randbedingung $X(0) = 0$ ist die Lösung der Differentialgleichung $DX'' = \lambda X$ sofort ersichtlich: $X(x) = A\sin(\mu x)$. Aus der Randbedingung $X(L) = 0$ folgt $\mu L = j\pi \ \Rightarrow \ \mu = \frac{j\pi}{L}$ mit $j = 1, 2, 3....$ Außerdem ergibt sich $\lambda = -D\mu^2 \ \Rightarrow \ \lambda_j = -D\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2$, $j \in \mathbb{N}$.

$$X_j(x) = A_j \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \ , \ j \in \mathbb{N} \ .$$

Die Differentialgleichung für $T(t)$: $\dot{T} = \lambda T$ hat, da es unendlich viele λ_j gibt, die Lösungsschar

$$T_j(t) = B_j \mathrm{e}^{-\lambda_j t} \ , \ j \in \mathbb{N} \ .$$

Die allgemeinste Form der Lösung für $v(x,t)$ ist daher mit $C_j = A_j B_j$

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cdot \mathrm{e}^{-D\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \ .$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ muss die Anfangsbedingung $v(x,0) = (T_0 - T_1) + \left(\frac{T_1 - T_2}{L}\right) x = cx + d$ erfüllt sein. Also folgt

$$\begin{aligned}
v(x,0) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cdot \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) &= cx + d \\
\sum_{j=1}^{\infty} C_j \cdot \underbrace{\int_0^L \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \, \mathrm{d}x}_{=\delta_{jk}\frac{L}{2}} &= \int_0^L (cx+d) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \, \mathrm{d}x \\
C_k \cdot \frac{L}{2} &= \int_0^L (cx+d) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \, \mathrm{d}x \\
\Rightarrow C_k &= \frac{2}{L} \int_0^L (cx+d) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_k &= \frac{2}{L} \left[c \underbrace{\int_0^L x \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \, \mathrm{d}x}_{=\frac{L^2}{k\pi}(-1)^{k+1}} + d \underbrace{\int_0^L \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \, \mathrm{d}x}_{=\frac{L}{k\pi}((-1)^{k+1}+1)} \right] \\
&= \frac{2}{k\pi} \left[(-1)^{k+1}(cL + d) + d \right] = \frac{2}{k\pi} \left[(-1)^{k+1} \left((T_1 - T_2) + (T_0 - T_1) \right) + (T_0 - T_1) \right] \\
&= \frac{2}{k\pi} \left[(-1)^{k+1} (T_0 - T_2) + T_0 - T_1 \right] \ .
\end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung

$$v(x,t) = \frac{L}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left[(-1)^{j+1} (T_0 - T_2) + T_0 - T_1 \right] \cdot \mathrm{e}^{-D\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \ .$$