Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2019

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 1 Gruppe A (Mo, 06.05.2019) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

Gegeben sei eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$. Dabei handelt es sich um ein halbes Ellipsoid, welches durch die xy-Ebene begrenzt wird. Die Oberfläche von V, $\partial V = \partial V_M \cup \partial V_B$, besteht aus zwei Teilen, dem Mantel,

$$\partial V_M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1,\ z \geq 0,\}$$

und dem Boden,

$$\partial V_B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,\ z = 0\}.$$

Weiter ist ein Vektorfeld,

$$a(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix},$$

gegeben.

a) (4 Punkte) Berechnen Sie das Flussintegral des Vektorfeldes $a(x,y,z)$ durch ∂V_M,

$$\int_{\partial V_M} a \cdot \mathrm{d}S_{Ellipsoidmantel}.$$

Hinweis: Zur Parametrisierung von ∂V_M benützen Sie

$$x = 2\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = 3\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = \cos\theta,$$

mit geeignet gewählten Grenzen für θ und φ. Weiters gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

Das Flächenelement dS ergibt sich mit der im Hinweis gegebenen Parametrisierung:

$$Ellipsoidmantel = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin\theta\cos\varphi \\ 3\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \theta = [0, \frac{\pi}{2}], \varphi = [0, 2\pi] \right\}$$

$$n \cdot \mathrm{d}(\theta,\varphi) = \mathrm{d}S_{Ellipsoidmantel} = \begin{pmatrix} 3\sin^2\theta\cos\varphi \\ 2\sin^2\theta\sin\varphi \\ 6\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}(\theta,\varphi)$$

$$a(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 2\sin\theta\cos\varphi \\ 3\sin\theta\sin\varphi \\ 6\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial V} a \cdot \,\mathrm{d}S &= \int_{\partial V} a(\theta,\varphi) \cdot \,\mathrm{d}S_{\text{Ellipsoidmantel}} \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[6\sin^3\theta\cos^2\varphi + 6\sin^3\theta\sin^2\varphi + 36\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\right] \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \\
&= \left[Hinweis\ \ sowie \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = 0\right] = 8\pi
\end{aligned}
$$

b) (1,5 Punkte) Berechnen Sie den Fluss durch die gesamte Oberfläche ∂V mithilfe des Satzes von Gauß. Zur Parametrisierung von V benützen Sie

$$x = 2r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = 3r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

mit geeignet gewählten Grenzen für r, θ und φ. Zeigen Sie zuerst dass die Determinante der Jacobimatrix $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ gleich $6r^2\sin\theta$ ist. Berechnen Sie damit das Volumsintegral, $\int_V \operatorname{div} a \, dV$.

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} 2\sin\theta\cos\varphi & 2\cdot r\cos\theta\cos\varphi & -2\cdot r\sin\theta\sin\varphi \\ 3\sin\theta\sin\varphi & 3\cdot r\cos\theta\sin\varphi & 3\cdot r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det J = 6r^2\sin\theta$$

Da gilt: $\operatorname{div} a = 2$, ergibt sich

$$\int_{\partial V} a \, \mathrm{d}S = \int_V \operatorname{div} a \, \mathrm{d}V = 2\int_V \, \mathrm{d}V = 8\pi.$$

c) (0,5 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus a) und b) das der Fluss durch ∂V_B gleich 0 ist.

Die beiden Integrale liefern beide dasselbe Ergebnis 8π. Es gilt

$$\int_V \operatorname{div} a \, \mathrm{d}V = \int_{\partial V} a(\theta,\phi)\cdot \mathrm{d}S_{\text{ Ellipsoidmantel}} + \int_{\partial V} a(\theta,\phi)\cdot \mathrm{d}S_{\text{Ellipsoidboden}}$$

$$8\pi = 8\pi + \int_{\partial V} a(\theta,\phi)\cdot \mathrm{d}S_{\text{Ellipsoidboden}}$$

und somit

$$\int_{\partial V} a(\theta,\phi)\cdot \mathrm{d}S_{\text{Ellipsoidboden}} = 0,$$

was auf direktem Weg natülich wesentlich einfacher zu berechnen gewesen wäre.

- **Aufgabe 2.**
  Betrachten Sie das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2}yz \\ -\sqrt{x^2 + y^2}xz \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Fläche $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$.
Berechnen Sie die beiden Integrale im Satz von Stokes. Gehen Sie dabei in folgenden Teilschritten vor.

a) (2 Punkte) Zur Parametrisierung von Ω benützen Sie die Kugelkoordinaten

$$r(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

mit geeignet gewählten Grenzen für θ und φ. Bezüglich dieser Parametrisierung berechnen Sie den Normalvektor auf die Fläche Ω. Weiters berechnen Sie die Rotation von f.

Bei der gegebenen Fläche handelt es sich um die obere Hälfte der Einheitskugel mit Mittelpunkt im Ursprung. Dem Hinweis folgend verwenden wir Kugelkoordinaten zur Parametrisierung. Zur Bestimmung des Normalvektors, leiten wir $r(\theta, \varphi)$ nach den Parametern θ und φ ab, und bilden das Kreuzprodukt

$$n = \frac{\partial r(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial r(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \sin^2(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin^2(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Rotation von f lautet $\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2}x \\ \sqrt{x^2 + y^2}y \\ -3\sqrt{x^2 + y^2}z \end{pmatrix}$.

b) (1,5 Punkte) Begründen Sie, warum der Satz von Stokes anwendbar ist. Berechnen Sie das Kurvenintegral von f über den Rand von Ω, $\int_{\partial\Omega} f \cdot \mathrm{d}r$. Als Vorbereitung auf den Punkt c) überprüfen Sie, ob der Normalverktor aus dem Punkt a) positiv orientiert ist (in Bezug auf die Durchlaufrichtung der Kurve in Punkt b)).

Die gegebene Fläche ist regulär und orientierbar (wie man aufgrund von Bsp a) sieht). Der Parameterbereich entsprechend der in a) gewählten Parametrisierung ist das Rechteck $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$. Dieses ist klarerweise beschänkt und von vier Geraden begrenzt. Somit sind die Voraussetzungen für den Satz von Stokes erfüllt. Ausgehend von der Parametrisierung aus a) an $\theta = \frac{\pi}{2}$ berechnen wir den Tangentialvektor $t := \frac{d}{d\varphi}\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten somit für das Randintegral

$$\int_{\Omega} \mathrm{rot}(f) \cdot dS = \int_{\partial\Omega} f(r(\frac{\pi}{2}, \varphi)) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Zur Überprüfung der Orientierung setzt man beispielsweise den Punkt $(\theta, \varphi) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ ein und erhält $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, also einen Vektor, der offensichtlich nach außen zeigt.

c) (2,5 Punkte) Berechnen Sie das Flächenintegral über die Rotation von f, $\int_\Omega \operatorname{rot} f \cdot \mathrm{d}S$.
Hinweis: Falls notwendig, verwenden Sie

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{16}.$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{rot}(f) dS &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{rot}(f)(r(\theta,\varphi)) \cdot n(\theta,\varphi)\ d(\theta,\varphi) \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \sin^2(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin^2(\theta)\sin(\varphi) \\ -3\sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin^2(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} d(\theta,\varphi) \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin^4(\theta)\left(\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)\right) - 3\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\right]\ d(\theta,\varphi) \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin^2(\theta) - 4\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\right]\ d(\theta,\varphi) \\
&= 2\pi \left[\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\ d\theta - 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\cos^2(\theta))\ d\theta\right] \overset{Hinweis}{=} 2\pi\left[\frac{\pi}{4} - 4\frac{\pi}{16}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dabei wurde beim vierten Gleichheitszeichen zweimal der Satz von Pythagoras zur Vereinfachung angewendet.

- **Aufgabe 3.** Betrachten Sie die Fläche F, welche durch die folgende Parameterdarstellung gegeben ist:

$$r : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad r(u,v) = \begin{pmatrix} av \\ u^2\cos(v) \\ u^2\sin(v) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ gegeben und $a > 0$.

a) (2 Punkte) Für welche $(u,v) \in B$ ist F eine reguläre Fläche? Begründen Sie!

$r(u,v)$ ist als Produkt von stetig differenzierbaren Funktionen selbst wiederum stetig differenzierbar. Die Vektoren

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot u\cos(v) \\ 2 \cdot u\sin(v) \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \begin{pmatrix} a \\ -u^2 \cdot \sin(v) \\ u^2 \cdot \cos(v) \end{pmatrix}$$

sind in $A := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq 0\}$ linear unabhängig.
Im Falle $u = 0$ wird nämlich der erste Vektor in allen Einträgen gleich Null, wodurch die beiden Vektoren linear abhängig sind.
Andererseits sind die beiden Vektoren in allen anderen Punkten linear unabhängig, da $a > 0$ laut Angabe.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie den Maßtensor von F!

Mit den oben berechneten Vektoren erhält man sofort:

$$M(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial r}{\partial u} \\ \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} & \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u^2 & 0 \\ 0 & a^2 + u^4 \end{pmatrix}$$

c) (3 Punkte) Setzen Sie $a = 2$ und berechnen Sie mithilfe des Maßtensors die Fläche von

$$F = \{r(u,v) \quad | \quad (u,v) \in [1,2] \times [-\pi,\pi]\}.$$

Hinweis: Substituieren Sie gegebenenfalls geeignet. Sie dürfen außerdem das folgende Integral verwenden:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{1+x^2} \cdot x + \operatorname{arsinh}(x)\right).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_F \mathrm{d}S &= \int_{(u,v)\in[1,2]\times[-\pi,\pi]} \sqrt{\det(M(u,v))}\,\mathrm{d}(u,v) = \int_{u=1}^{2}\int_{v=-\pi}^{\pi} 2u \cdot \sqrt{a^2+u^4}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_{u=1}^{2}\int_{v=-\pi}^{\pi} 2u \cdot a \cdot \sqrt{1+\left(\frac{u^2}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

Nun substituieren wir $t := \frac{u^2}{a}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int_F \mathrm{d}S &= 4\pi \cdot a \int_{u=1}^{2} u \cdot \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{a}{2u}\,\mathrm{d}t = 2\pi \cdot a^2 \int_{t=\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}} \sqrt{1+t^2} \cdot \mathrm{d}t \\ &= \pi a^2 \left(\sqrt{1+\frac{16}{a^2}} \cdot \frac{4}{a} + \operatorname{arsinh}\left(\frac{4}{a}\right) - \sqrt{1+\frac{1}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} - \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{a}\right)\right)\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der Hinweis verwendet wurde. Für $a = 2$ laut Angabe erhalten wir schlussendlich

$$\begin{aligned}\int_F \mathrm{d}S &= 4\pi \left(\sqrt{1+\frac{16}{4}} \cdot \frac{4}{2} + \operatorname{arsinh}\left(\frac{4}{2}\right) - \sqrt{1+\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2} - \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= 4\pi \left(2\sqrt{5} + \operatorname{arsinh}(2) - \frac{\sqrt{5}}{4} - \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= 7\sqrt{5}\pi + 4\pi\left(\operatorname{arsinh}(2) - \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \approx 61.27\end{aligned}$$

Die Berechnung des numerischen Wertes ist nicht erforderlich, um volle Punktezahl zu erreichen.