

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 2 Gruppe A (Fr, 14.06.2019) (mit Lösung)

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

• **Aufgabe 1.**

a) (2 Punkte) Gegeben sei die Lagrangefunktion mit $\varphi := \varphi(x)$ und λ ,

$$h(x, \varphi, \varphi') := \frac{1}{2m}(\varphi')^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \varphi^2 + \lambda \varphi^2.$$

Finden Sie eine Differentialgleichung für $\varphi(x)$, welche das Wirkungsintegral

$$I[\varphi] := \int \left(\frac{1}{2m}(\varphi')^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \varphi^2 \right) dx$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 dx - 1 = 0$$

minimiert.

Mit

$$h(x, \varphi, \varphi') = \frac{1}{2m} (\varphi')^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \varphi^2 + \lambda \varphi^2$$

ergibt sich mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi'} \right) = \frac{\partial h}{\partial \varphi}$$

Die einzelnen Teile ergeben sich zu

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} = (m\omega^2 x^2 + 2\lambda) \varphi \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi'} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{m} \varphi' \right) = \frac{1}{m} \varphi'' \tag{2}$$

Einsetzen von (1) und (2) in die Euler-Lagrange-Gleichung und vereinfachen ergibt

$$(m\omega^2 x^2 + 2\lambda) \varphi = \frac{1}{m} \varphi'' \tag{3}$$

Für $-\lambda = E$ ergibt sich die Schrödingergleichung für einen eindimensionalen harmonischen Oszillator. (Nicht gefragt)

$$-\frac{1}{2m} \varphi'' + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \varphi = E \varphi \tag{4}$$

b) (2 Punkte) Gegeben sei die Lagrangefunktion des Keplerproblems mit $r = r(t)$ und λ ,

$$h(t, r, \dot{r}) := \frac{m}{2} (r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{r}^2) + \frac{\lambda}{r},$$

wobei m und $\dot{\phi}$ Konstanten sind. Finden Sie eine Differentialgleichung für jene Funktion $r(t)$ welche das Wirkungsintegral

$$I[r] := \int \left[\frac{m}{2} (r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{r}^2) \right] dt$$

unter der Nebenbedingung

$$\int \frac{1}{r} dt - C = 0$$

minimiert.

Wieder verwendet man die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial h}{\partial r}$$

Die einzelnen Teile ergeben sich zu

$$\frac{\partial h}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\lambda}{r^2} \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{r}) = m\ddot{r}. \quad (6)$$

Einsetzen von (5) und (6) in die Euler-Lagrange-Gleichung und vereinfachen ergibt

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\lambda}{r^2}. \quad (7)$$

c) (0,5 Punkte) Lösen Sie die Gleichung aus b) nach $r(t)$ für $\lambda = 0$ und $\dot{\phi} = 0$ unter den Randbedingungen $r(0) = -1$ und $\dot{r}(0) = 1$.

Es ergibt sich die einfache Gleichung

$$m\ddot{r} = 0, \quad (8)$$

mit der Lösung

$$r(t) = C_1 t + C_2. \quad (9)$$

Unter Verwendung der Randbedingungen ergibt sich

$$r(t) = t - 1. \quad (10)$$

- d) (1,5 Punkte) Unabhängig lösbar. Gegeben sei wieder die Lagrangefunktion und das Wirkungsintegral und die Nebenbedingung aus b). Hier sei $\phi(t)$ die Funktion und r bzw. \dot{r} sowie m sind als konstant zu betrachten,

$$h(t, \phi, \dot{\phi}) := \frac{m}{2} (r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{r}^2) + \frac{\lambda}{r}.$$

Zeigen Sie mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung, dass der Drehimpuls $l = mr^2 \dot{\phi}$ eine Erhaltungsgröße ist, sich also zeitlich NICHT ändert.

Es gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial h}{\partial \phi}. \quad (11)$$

Aus

$$\frac{\partial h}{\partial \phi} = 0 \quad (12)$$

und

$$\frac{\partial h}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} = l \quad (13)$$

folgt somit, dass

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi}) = 0 = \frac{dl}{dt} \quad (14)$$

und daher l zeitlich konstant ist.

• Aufgabe 2.

a) (4 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion $f(x)$.

$$f(x) = (3 + x)e^{-|2-x|}$$

Hinweis: $\int x e^{ax} dx = \frac{x}{a} e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax}$, $a = \text{const.}$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} (3 + x)e^{-|2-x|} e^{-ikx} dx$$

Zunächst löst man den Betrag auf.

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^2 (3 + x)e^{(1-ik)x-2} dx + \int_2^{\infty} (3 + x)e^{-(1+ik)x+2} dx \\ &= \left(\frac{x}{1-ik} - \frac{1}{(1-ik)^2} + \frac{3}{1-ik} \right) e^{(1-ik)x-2} \Big|_{-\infty}^2 + \left(-\frac{x}{1+ik} - \frac{1}{(1+ik)^2} - \frac{3}{1+ik} \right) e^{-(1+ik)x+2} \Big|_2^{\infty} \\ &= \frac{e^{-2ik}}{1-ik} \left(5 - \frac{1}{1-ik} \right) + \frac{e^{-2ik}}{1+ik} \left(5 + \frac{1}{1+ik} \right) \end{aligned}$$

- b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f(x)$ unter Verwendung der Linearität der Fouriertransformation, sowie der Ableitungsregeln der Fouriertransformierten.

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

Hinweis: $\widehat{e^{-x^2}} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{k^2}{4}}$

Zuerst berechnen wir:

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{-x^2}) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 e^{-x^2} = \frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2}$$

Unter Ausnutzung der Linearität folgt nun:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2} \widehat{e^{-x^2}} + \frac{1}{4} \widehat{\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2}}$$

Nach Verwendung der Ableitungsregeln erhält man:

$$= \frac{1}{2} \widehat{e^{-x^2}} + \frac{1}{4} (-k^2) \widehat{e^{-x^2}}$$

Mithilfe des Hinweises erhält man das Endergebnis:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{4} (2 - k^2) \cdot \sqrt{\pi} e^{-\frac{k^2}{4}}$$

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei das folgende Anfangs-Randwertproblem:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0$$

$$u(0, t) = 1, \quad u(L, t) = 3$$

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + 4 \sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right) + \frac{2}{L}x + 1$$

- a) (0,5 Punkte) Welches physikalische Problem könnte durch diese Differentialgleichung beschrieben werden?

Wärmeverteilung in einem quellen- und senkenfreien, homogenen dünnen Stab der Länge L .

- b) (1,0 Punkte) Berechnen sie die stationäre Lösung $u_{stat}(x)$.

Für die stationäre Lösung gilt:

$$\frac{\partial u_{stat}}{\partial t} = 0 = D \frac{\partial^2 u_{stat}}{\partial x^2}$$

$$u_{stat} = kx + d$$

Die Koeffizienten k und d lassen sich aus den Randbedingungen berechnen.

$$\left. \begin{array}{l} u_{stat}(0) = d = 1 \\ u_{stat}(L) = kL + 1 \rightarrow k = \frac{2}{L} \end{array} \right\} u_{stat}(x) = \frac{2}{L}x + 1$$

- c) (1,0 Punkte) Passen Sie die Anfangs- und Randbedingungen an die Funktion $v(x, t) = u(x, t) - u_{stat}(x)$ an.

Da $\frac{\partial u_{stat}}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial^2 u_{stat}}{\partial x^2} = 0$ sind, gilt für $v(x, t)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Für die neuen Anfangs- und Randbedingungen ergeben sich:

$$v(0, t) = 0 = v(L, t)$$

$$v(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + 4 \sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right)$$

d) (3,0 Punkte) Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung für $v(x, t)$.

Wir setzen den Separationsansatz $v(x, t) = X(x)T(t)$ an und setzen ihn in die Wärmeleitungsgleichung ein.

$$X\dot{T} = DX''T \Rightarrow \frac{\dot{T}}{T} = D\frac{X''}{X} = \lambda$$

Für $X(x)$ verwenden wir den Ansatz: $X(x) = A \sin(\mu x) + B \cos(\mu x)$. Mit den Randbedingungen erhält man $X(0) = B = 0$ und $X(L) = 0 = A \sin(\mu L) \rightarrow \mu L = n\pi \rightarrow \mu = \frac{n\pi}{L}$ ($n=1, 2, 3, \dots$). Eingesetzt in die DGL ergibt sich $\lambda_n = -D \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

$$X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Für $T(t)$ wählen wir einen Exponentialansatz. Es gilt zu beachten, dass es unendlich viel λ_n gibt, weshalb man für $T(t)$ eine Lösungsschar $T_n(t)$ erhält.

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n t}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Als allgemeine Lösung erhält man die Summe über alle n , wobei $E_n = A_n C_n$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (15)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten D_n verwenden wir die Anfangsbedingung $v(x, 0)$

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + 4 \sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &\Rightarrow E_1 = 1; E_5 = 4 \end{aligned}$$

Die Endlösung lautet damit:

$$v(x, t) = e^{-D\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + 4e^{-D\left(\frac{5\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right)$$

e) (0,5 Punkte) Überprüfen Sie, ob die Funktion $u(x, t)$ die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt.

$$u(x, t) = v(x, t) + u_{stat}(x)$$

$$u(x, t) = e^{-D\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + 4e^{-D\left(\frac{5\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right) + \frac{2}{L}x + 1$$

$$u(0, t) = 1 \quad \checkmark$$

$$u(L, t) = 3 \quad \checkmark$$