Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2019

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 2 Gruppe B (Fr, 14.06.2019) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

a) (4 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion $f(x)$.

$$f(x) = (2+x)e^{-|3-x|}$$

Hinweis: $\int xe^{ax}\mathrm{d}x = \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}, \quad a = const.$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty}(2+x)e^{-|3-x|}e^{-ikx}\mathrm{d}x$$

Zunächst löst man den Betrag auf.

$$= \int_{-\infty}^{3}(2+x)e^{(1-ik)x-3}\mathrm{d}x + \int_{3}^{\infty}(2+x)e^{-(1+ik)x+3}\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x}{1-ik} - \frac{1}{(1-ik)^2} + \frac{2}{1-ik}\right)e^{(1-ik)x-3}|_{-\infty}^{3} + \left(-\frac{x}{1+ik} - \frac{1}{(1+ik)^2} - \frac{2}{1+ik}\right)e^{-(1+ik)x+3}|_{3}^{\infty}$$

$$= \frac{e^{-3ik}}{1-ik}\left(5 - \frac{1}{1-ik}\right) + \frac{e^{-3ik}}{1+ik}\left(5 + \frac{1}{1+ik}\right)$$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f(x)$ unter Verwendung der Linearität der Fouriertransformation, sowie der Ableitungsregeln der Fouriertransformierten.

$$f(x) = 4x^2 e^{-x^2}$$

Hinweis: $\widehat{e^{-x^2}} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{k^2}{4}}$

Zuerst berechnen wir:

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{-x^2}) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow 4x^2 e^{-x^2} = 2e^{-x^2} + \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2}$$

Unter Ausnutzung der Linearität folgt nun:

$$\hat{f}(k) = 2\widehat{e^{-x^2}} + \widehat{\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2}}$$

Nach Verwendung der Ableitungsregeln erhält man:

$$= 2\widehat{e^{-x^2}} + (-k^2)\widehat{e^{-x^2}}$$

Mithilfe des Hinweises erhält man das Endergebnis:

$$\hat{f}(k) = (2 - k^2) \cdot \sqrt{\pi} e^{-\frac{k^2}{4}}$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei das folgende Anfangs-Randwertproblem:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le L,\ t \ge 0$$

$$u(0,t) = 2,\ u(L,t) = 4$$

$$u(x,0) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + 6\sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right) + \frac{2}{L}x + 2$$

a) (0,5 Punkte) Welches physikalische Problem könnte durch diese Differentialgleichung beschrieben werden?

Wärmeverteilung in einem quellen- und senkenfreien, homogenen dünnen Stab der Länge L.

b) (1,0 Punkte) Berechnen sie die stationäre Lösung $u_{stat}(x)$.

Für die stationäre Lösung gilt:

$$\frac{\partial u_{stat}}{\partial t} = 0 = D\frac{\partial^2 u_{stat}}{\partial x^2}$$
$$u_{stat} = kx + d$$

Die Koeffizienten k und d lassen sich aus den Randbedingungen berechnen.

$$\left.\begin{array}{r} u_{stat}(0) = d = 2 \\ u_{stat}(L) = kL + 1 \rightarrow k = \frac{2}{L} \end{array}\right\} u_{stat}(x) = \tfrac{2}{L}x + 2$$

c) (1,0 Punkte) Passen Sie die Anfangs-und Randbedingungen an die Funktion $v(x,t) = u(x,t) - u_{stat}(x)$ an.

Da $\frac{\partial u_{stat}}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial^2 u_{stat}}{\partial x^2} = 0$ sind, gilt für $v(x,t)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Für die neuen Anfangs- und Randbedingungen ergeben sich:

$$v(0,t) = 0 = v(L,t)$$

$$v(x,0) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + 6\sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right)$$

d) (3,0 Punkte) Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung für $v(x,t)$.

Wir setzen den Serperationsansatz $v(x,t) = X(x)T(t)$ an und setzen ihn in die Wärmeleitungsgleichung ein.

$$X\dot{T} = DX''T \Rightarrow \frac{\dot{T}}{T} = D\frac{X''}{X} = \lambda$$

Für X(x) verwenden wir den Ansatz: $X(x) = A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x)$. Mit den Randbedingungen erhält man $X(0) = B = 0$ und $X(L) = 0 = A\sin(\mu L) \rightarrow \mu L = n\pi \rightarrow \mu = \frac{n\pi}{L}$ (n=1, 2, 3, ...). Eingesetzt in die DGL ergibt sich $\lambda_n = -D\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$$X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Für T(t) wählen wir einen Exponentialansatz. Es gilt zu beachten, dass es unendlich viele λ_n gibt, weshalb man für T(t) eine Lösungsschar $T_n(t)$ erhält.

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n t}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Als allgemeine Lösung erhält man die Summe über alle n, wobei $E_n = A_n C_n$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{1}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten E_n verwenden wir die Anfangsbedingung $v(x,0)$

$$v(x,0) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + 6\sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\Rightarrow E_3 = 2; E_5 = 6$$

Die Endlösung lautet damit:

$$v(x,t) = 2e^{-D\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + 6e^{-D\left(\frac{5\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right)$$

e) (0,5 Punkte) Überprüfen Sie, ob die Funktion $u(x,t)$ die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt.

$$u(x,t) = v(x,t) + u_{stat}(x)$$

$$u(x,t) = 2e^{-D\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + 6e^{-D\left(\frac{5\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right) + \frac{2}{L}x + 2$$

$$u(0,t) = 2 \quad \checkmark$$

$$u(L,t) = 4 \quad \checkmark$$

- **Aufgabe 3.**

a) (2 Punkte) Gegeben sei die Lagrangefunktion mit $\psi := \psi(x)$ und λ,

$$h(x, \psi, \psi') := \frac{1}{2m}(\psi')^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi^2 + \lambda\psi^2.$$

Finden Sie eine Differentialgleichung für $\psi(x)$, welche das Wirkungsintegral

$$I[\psi] := \int \left(\frac{1}{2m}(\psi')^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi^2 \right) dx$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx - 1 = 0$$

minimiert.

Mit

$$h(x, \psi, \psi') = \frac{1}{2m}\left(\psi'\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi^2 + \lambda\psi^2$$

ergibt sich mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial \psi'}\right) = \frac{\partial h}{\partial \psi}$$

Die einzelnen Teile ergeben sich zu

$$\frac{\partial h}{\partial \psi} = \left(m\omega^2 x^2 + 2\lambda\right)\psi \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial \psi'}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{m}\psi'\right) = \frac{1}{m}\psi''. \tag{3}$$

Einsetzten von (1) und (2) in die Euler-Lagrange-Gleichung und vereinfachen ergibt

$$\left(m\omega^2 x^2 + 2\lambda\right)\psi = \frac{1}{m}\psi''. \tag{4}$$

Für $-\lambda = E$ ergibt sich die Schrödingergleichung für einen eindimensionalen harmonischen Oszillator. (Nicht gefragt)

$$-\frac{1}{2m}\psi'' + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi \tag{5}$$

b) (2 Punkte) Gegeben sei die Lagrangefunktion des Keplerproblems mit $r = r(t)$ und λ,

$$h(t, r, \dot{r}) := \frac{\mu}{2}\left(r^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}^2\right) + \frac{\lambda}{r},$$

wobei μ und $\dot{\phi}$ Konstanten sind. Finden Sie eine Differentialgleichung für jene Funktion $r(t)$ welche das Wirkungsintegral

$$I[r] := \int \left[\frac{\mu}{2}\left(r^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}^2\right)\right] dt$$

unter der Nebenbedingung

$$\int \frac{1}{r} dt - C = 0$$

minimiert.

Wieder verwendet man die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial h}{\partial r}$$

Die einzelnen Teile ergeben sich zu

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \mu r \dot{\phi}^2 - \frac{\lambda}{r^2} \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{d}{dt}(\mu \dot{r}) = \mu \ddot{r}. \tag{7}$$

Einsetzen von (5) und (6) in die Euler-Lagrange-Gleichung und vereinfachen ergibt

$$\mu \ddot{r} = \mu r \dot{\phi}^2 - \frac{\lambda}{r^2}. \tag{8}$$

c) (0,5 Punkte) Lösen Sie die Gleichung aus b) nach $r(t)$ für $\lambda = 0$ und $\dot{\phi} = 0$ unter den Randbedingungen $r(0) = 1$ und $\dot{r}(0) = -1$.

Es ergibt sich die einfache Gleichung

$$\mu \ddot{r} = 0, \tag{9}$$

mit der Lösung

$$r(t) = C_1 t + C_2. \tag{10}$$

Unter Verwendung der Randbedingungen ergibt sich

$$r(t) = 1 - t. \tag{11}$$

d) (1,5 Punkte) Unabhängig lösbar. Gegeben sei wieder die Lagrangefunktion und das Wirkungsintegral und die Nebenbedingung aus b). Hier sei $\phi(t)$ die Funktion und r bzw. $\dot{r}$ sowie μ sind als konstant zu betrachten,

$$h(t, \phi, \dot{\phi}) := \frac{\mu}{2}\left(r^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}^2\right) + \frac{\lambda}{r}.$$

Zeigen Sie mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung, dass der Drehimpuls $l = \mu r^2\dot{\phi}$ eine Erhaltungsgröße ist, sich also zeitlich NICHT ändert.

Es gilt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{\partial h}{\partial \phi}. \tag{12}$$

Aus

$$\frac{\partial h}{\partial \phi} = 0 \tag{13}$$

und

$$\frac{\partial h}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2\dot{\phi} = l \tag{14}$$

folgt somit, dass

$$\frac{d}{dt}\left(\mu r^2\dot{\phi}\right) = 0 = \frac{dl}{dt} \tag{15}$$

und daher l zeitlich konstant ist.