- **Aufgabe A.** Gegeben sei die Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$$

, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \min\{-\frac{4}{7}x+4, \frac{4}{7}x+4\} & x \in [-7,7] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(4 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von

$$f$$

. Werten Sie danach ihren analytischen Ausdruck an der Stelle

$$k = \frac{\pi}{14}$$

aus und geben Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen gerundet in das Antwortfeld ein.

Hinweis: Die Existenz der Fouriertransformierten muss nicht vorher gezeigt werden!

- **Aufgabe B.** Gegeben sei die Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$$

, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \min\{-\frac{8}{3}x+8, \frac{8}{3}x+8\} & x \in [-3,3] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(4 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von

$$f$$

. Werten Sie danach ihren analytischen Ausdruck an der Stelle

$$k = \frac{\pi}{6}$$

aus und geben Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen gerundet in das Antwortfeld ein.

Hinweis: Die Existenz der Fouriertransformierten muss nicht vorher gezeigt werden!

- **Aufgabe C.** Gegeben sei die Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$$

, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \min\{-\frac{6}{5}x+6, \frac{6}{5}x+6\} & x \in [-5,5] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(4 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von

$$f$$

. Werten Sie danach ihren analytischen Ausdruck an der Stelle

$$k = \frac{\pi}{10}$$

aus und geben Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen gerundet in das Antwortfeld ein.

Hinweis: Die Existenz der Fouriertransformierten muss nicht vorher gezeigt werden!

Wir rechnen zuerst allgemein mit

$$f(x) = \begin{cases} \min\{-\frac{b}{a}x + b, \frac{b}{a}x + b\} & x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

und setzen die Werte der einzelnen Gruppen zum Schluss ein.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
&= b \int_{-a}^{0} \left(\frac{x}{a} + 1\right) e^{-ikx} dx + b \int_{0}^{a} \left(-\frac{x}{a} + 1\right) e^{-ikx} dx \\
&\overset{\text{Subst.}}{=} -b \int_{a}^{0} \left(1 - \frac{y}{a}\right) e^{iky} dy + b \int_{0}^{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{-ikx} dx \\
&\overset{x:=y}{=} b \int_{0}^{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) dx \\
&\overset{\text{PI}}{=} b \left[\left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{ik}\right) \left(1 - \frac{x}{a}\right)\Bigg|_{0}^{a} + \frac{1}{ika} \int_{0}^{a} \left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) \right] \\
&= b \left[0 + \frac{e^{ika} + e^{-ika}}{i^2 k^2 a} - \frac{2}{i^2 k^2 a} \right] \\
&= \frac{2b}{ak^2} \left(1 - \cos(ka)\right).
\end{aligned}$$

Nun setzen wir die Werte der einzelnen Gruppen ein.

A) $a = 7,\ b = 4 \ \Rightarrow\ \hat{f}(k) = \frac{8}{7k^2}\left(1 - \cos(7k)\right)$

B) $a = 3,\ b = 8 \ \Rightarrow\ \hat{f}(k) = \frac{16}{3k^2}\left(1 - \cos(3k)\right)$

C) $a = 5,\ b = 6 \ \Rightarrow\ \hat{f}(k) = \frac{12}{5k^2}\left(1 - \cos(5k)\right)$

Ausgewertet an den angegebenen Stellen erhalten wir

A) $k = \frac{\pi}{14} \ \Rightarrow\ \hat{f}(\frac{\pi}{14}) \approx 22.70$

B) $k = \frac{\pi}{6} \ \Rightarrow\ \hat{f}(\frac{\pi}{6}) \approx 19.45$

C) $k = \frac{\pi}{10} \ \Rightarrow\ \hat{f}(\frac{\pi}{10}) \approx 24.32$

Gruppe A (Fundamentallösung)
Zeigen Sie, dass
$$U(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}), & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$
eine Fundamentallösung der Differentialgleichung
$$u''(x) - 4u(x) = f(x)$$
ist. Anschließend berechnen Sie eine Partikulärlösung von
$$u''(x) - 4u(x) = \sinh(x)$$
und werten sie an $x = 0$ aus
Hinweis:
$$\int e^{\alpha x} \sinh(x) dx = \frac{1}{\alpha^2 - 1} e^{\alpha x} (\alpha \sinh(x) - \cosh(x))$$
$$\lim_{x\to\infty} \sinh(x) \to \infty, \lim_{x\to\infty} \cosh(x) \to \infty, \cosh(0) = 1, \sinh(0) = 0$$

Gruppe B (Fundamentallösung)
Zeigen Sie, dass
$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{6}(e^{3x} - e^{-3x}), & x > 0 \end{cases}$$
eine Fundamentallösung der Differentialgleichung
$$u''(x) - 9u(x) = f(x)$$
ist. Anschließend berechnen Sie eine Partikulärlösung von
$$u''(x) - 9u(x) = \cos(x)$$
und werten sie an $x = 0$ aus
Hinweis:
$$\int e^{\alpha x} \cos(x) dx = \frac{1}{\alpha^2 + 1} e^{\alpha x} (\alpha \cos(x) + \sin(x))$$

Gruppe C (Fundamentallösung)
Zeigen Sie, dass
$$U(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}(e^{4x} - e^{-4x}), & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$
eine Fundamentallösung der Differentialgleichung
$$u''(x) - 16u(x) = f(x)$$
ist. Anschließend berechnen Sie eine Partikulärlösung von
$$u''(x) - 16u(x) = \sin(x)$$

und werten sie an $x = 0$ aus
Hinweis:

$$\int e^{\alpha x} \sin(x) dx = \frac{1}{\alpha^2 + 1} e^{\alpha x} (\alpha \sin(x) - \cos(x))$$

!

(A)

$$U(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right), & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$$

$$u''(x) - 4u(x) = f(x)$$

Ansatz: $u(x) = Ce^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2$$

$$u(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$$

1. Schritt: Löse $LU = \delta \Rightarrow U'' - 4U = \delta$

$$\Leftrightarrow U'' - 4U = 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$U(x) = \begin{cases} A_- e^{2x} + B_- e^{-2x}, & x<0 \\ A_+ e^{2x} + B_+ e^{-2x}, & x>0 \end{cases}$$

- $U(0+) = U(0-)$

  Stetigkeit an 0 $\Rightarrow A_- + B_- = A_+ + B_+ := 0$

  $$A_- = -B_- \,;\; A_+ = -B_+$$

- $U'(0+) - U'(0-) = 1$

$\Rightarrow 4A_+ - 4A_- = 1 \Rightarrow (A_+ - A_-) = \frac{1}{4}$ wähle: $A_- = -\frac{1}{4}$

$$A_+ = 0$$

$$U(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right), & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$$

Löse: $u''(x) - 4u(x) = \sinh(x)$

$$\int e^{\alpha x}\sinh(x) = \frac{1}{\alpha^2 - 1} e^{\alpha x}\left(\alpha \sinh(x) - \cosh(x)\right)$$

$$u(x) = (U * \sinh)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi)\sinh(\xi)\,d\xi = \int_{x}^{\infty} -\frac{1}{4}\left(e^{2(x-\xi)} - e^{-2(x-\xi)}\right)\sinh(\xi)\,d\xi$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{2x}\left(\frac{1}{3}e^{-2\xi}(-2\sinh(\xi) - \cosh(\xi))\right) - e^{-2x}\left(\frac{1}{3}e^{2\xi}(2\sinh\xi - \cosh\xi)\right)\right)\Big|_{x}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{12}\left(-2\sinh x - \cosh x - 2\sinh x + \cosh x\right) + \cancel{\infty} = -\frac{1}{3}\frac{\sinh(x)}{\cancel{\cosh(x)}}$$

$u(0) = \cancel{-\frac{1}{6}}\ 0$

(B)

$$U(x) = \begin{cases} \cancel{\tfrac{1}{4}}\ 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{6}\left(e^{3x} - e^{-3x}\right) & , x > 0 \end{cases}$$

$$u''(x) - 9u(x) = f(x)$$

Ansatz: $u(x) = Ce^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 - 9 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm 3$$

$$u(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x}$$

1. Schritt: Löse $LU = \delta \Rightarrow U'' - 9U = \delta$

$$\Leftrightarrow U'' - 9U = 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$U(x) = \begin{cases} A_- e^{3x} + B_- e^{-3x} & , x < 0 \\ A_+ e^{3x} + B_+ e^{-3x} & , x > 0 \end{cases}$$

- $U(0+) = U(0+)$

Stetigkeit an $0 \Rightarrow A_- + B_- = A_+ + B_+ := 0$

$$A_- = -B_- \ ; \ A_+ = -B_+$$

- $U'(0+) - U'(0-) = 1$

$\Rightarrow 6A_+ - 6A_- = 1 \Rightarrow (A_+ - A_-) = \frac{1}{6}$ wähle: $A_- = 0$

$$A_+ = +\frac{1}{6}$$

$$U(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ +\frac{1}{6}\left(e^{3x} - e^{-3x}\right) & , x > 0 \end{cases}$$

Löse: $u''(x) - 9u(x) = \cos(x)$

$$u(x) = (U * \cos)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi)\cos(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{x} +\frac{1}{6}\left(e^{3(x-\xi)} - e^{-3(x-\xi)}\right)\cos(\xi)\,d\xi$$

$$= +\frac{1}{6}\left(e^{3x}\left(\frac{1}{10}e^{-3\xi}(-3\cos(\xi) + \sin(\xi))\right) - e^{-3x}\left(\frac{1}{10}e^{3\xi}(3\cos\xi + \sin\xi)\right)\right)\Bigg|_{-\infty}^{x}$$

$$= +\frac{1}{60}\left((-3\cos x + \sin x - 3\cos x - \sin x) - \cancel{\infty}\right) = -\frac{1}{10}\cos x$$

$$U(0) = -\frac{1}{10} \approx$$

(c)

$$U(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}\left(e^{4x} - e^{-4x}\right), & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

$$u''(x) - 16u(x) = f(x)$$

Ansatz: $u(x) = Ce^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 - 16 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 4$

$$u(x) = Ae^{4x} + Be^{-4x}$$

1. Schritt: Löse $LU = \delta \Rightarrow U'' - 16U = \delta \Leftrightarrow U'' - 16U = 0 \quad \forall x \neq 0$

$$U(x) = \begin{cases} A_- e^{4x} + B_- e^{-4x}, & x < 0 \\ A_+ e^{4x} + B_+ e^{-4x}, & x > 0 \end{cases}$$

- $U(0+) = U(0-)$

Stetigkeit an 0 $\Rightarrow$ $A_- + B_- = A_+ + B_+ := 0$

$A_- = -B_- \; ; \; A_+ = -B_+$

- $U'(0+) - U'(0-) = 1$

$\Rightarrow 8A_+ - 8A_- = 1 \Rightarrow A_+ - A_- = \frac{1}{8}$ wähle: $A_+ = 0$

$A_- = -\frac{1}{8}$

$$U(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}\left(e^{4x} - e^{-4x}\right), & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Löse: $u''(x) - 16u(x) = \sin(x)$

$$u(x) = (U * \sin)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi) f(\xi)\, d\xi = \int_{x}^{\infty} -\frac{1}{8}\left(e^{4(x-\xi)} - e^{-4(x-\xi)}\right)\sin(\xi)\, d\xi$$

$$= -\frac{1}{8}\left(e^{4x}\left(\frac{1}{17}e^{-4\xi}\left(-4\sin\xi + \cos\xi\right)\right) - e^{-4x}\left(\frac{1}{17}e^{4\xi}\left(4\sin\xi + \cos\xi\right)\right)\right)\Big|_{x}^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{17}\left(-4\sin x + \cos x - 4\sin x - \cos x\right) + \cancel{0}\right) = -\frac{1}{17}\sin x$$

$u(0) = 0$

II)

Aufgabe Euler-Lagrange (Version A)

Finden Sie die Funktion $y := y(x)$, für welche der Ausdruck

$$I[y] := \int_0^2 \left(-y^2 + 4yy' - y'^2 - 7y' - e^{\frac{x^2}{3}} + 2\sinh(x)\right) dx$$

unter der Bedingung

$$\int_0^2 5y dx = 0$$

minimal wird.
a) Verwenden Sie die Euler-Lagrange-Gleichung um eine Differentialgleichung zu finden deren Lösung das Problem löst.
b) Berechnen Sie die homogene Lösung zur in a) gefundenen Differentialgleichung.
c) Berechnen Sie die Partikulärlösung zur in a) gefundenen Differentialgleichung. (Machen Sie einen geeigneten Ansatz.)
d) Stellen Sie ein Gleichungssystem für die bestimmung der konstanten in der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung aus a) mit den Randbedingungen $y(0) = 1$ und $y(2) = 0$ auf. (Sie müssen dieses Gleichungssystem NICHT lösen.)

Aufgabe Euler-Lagrange (Version B)

Finden Sie die Funktion $y := y(x)$, für welche der Ausdruck

$$I[y] := \int_0^2 \left(-2y^2 + 8yy' - 2y'^2 + 9y' + e^{\frac{x^2}{4}} - 4\sinh(x)\right) dx$$

unter der Bedingung

$$\int_0^2 10y dx = 0$$

minimal wird.
a) Verwenden Sie die Euler-Lagrange-Gleichung um eine Differentialgleichung zu finden deren Lösung das Problem löst.
b) Berechnen Sie die homogene Lösung zur in a) gefundenen Differentialgleichung.
c) Berechnen Sie die Partikulärlösung zur in a) gefundenen Differentialgleichung. (Machen Sie einen geeigneten Ansatz.)
d) Stellen Sie ein Gleichungssystem für die bestimmung der konstanten in der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung aus a) mit den Randbedingungen $y(0) = 1$ und $y(2) = 0$ auf. (Sie müssen dieses Gleichungssystem NICHT lösen.)

Aufgabe Euler-Lagrange (Version C)

Finden Sie die Funktion $y := y(x)$, für welche der Ausdruck

$$I[y] := \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}y^2 + 2yy' - \frac{1}{2}y'^2 + 3y' - e^{\frac{x^2}{12}} + 8\sinh(x) \right) dx$$

unter der Bedingung

$$\int_0^2 \frac{5}{2} y dx = 0$$

minimal wird.

a) Verwenden Sie die Euler-Lagrange-Gleichung um eine Differentialgleichung zu finden deren Lösung das Problem löst.

b) Berechnen Sie die homogene Lösung zur in a) gefundenen Differentialgleichung.

c) Berechnen Sie die Partikulärlösung zur in a) gefundenen Differentialgleichung. (Machen Sie einen geeigneten Ansatz.)

d) Stellen Sie ein Gleichungssystem für die bestimmung der konstanten in der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung aus a) mit den Randbedingungen $y(0) = 1$ und $y(2) = 0$ auf. (Sie müssen dieses Gleichungssystem NICHT lösen.)

a) $f(x,y,y') := -y^2 + 4y'y - (y')^2 - 7y' - e^{\frac{x^2}{9}} + 2\sinh(x)$

Ⓐ

$g(x,y,y') := 5y$

Ⓑ $f = -2y^2 + 8y'y - 2(y')^2 + 9y' + e^{\frac{x^2}{4}} - 4\sinh(x)$

$g = 10y$

Ⓒ $f = -\frac{1}{2}y^2 + 2yy' - \frac{1}{2}(y')^2 + 3y' - e^{\frac{x^2}{12}} + 8\sinh(x)$

$g = \frac{5}{2}y$

$h := f + \lambda \cdot g$

Restliche Lösungen bis auf Faktoren gleich. (ab b) völlig ident

ELG: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h(x,y,y')}{\partial y'}\right) = \frac{\partial h(x,y,y')}{\partial y}$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -2y + 4y' + 5\lambda$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}\left(4y - 2y' - 7\right) = 4y' - 2y''$$

$$\Rightarrow \cancel{4y'} - 2y'' = -2y + \cancel{4y'} + 5\lambda$$

$$0 = y'' - y + \frac{5}{2}\lambda$$

b) y_h: $y'' - y = 0$

$$y(x) = Ce^{\lambda x} \longrightarrow \lambda^2 Ce^{\lambda x} - Ce^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\longrightarrow y_h(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

c) y_p: $y'' - y = -\frac{5}{2}\lambda$

$$y_p(x) = A \longrightarrow -A = -\frac{5}{2}\lambda \Rightarrow A = \frac{5}{2}\lambda$$

$$\longrightarrow y_p(x) = \frac{5}{2}\lambda$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{5}{2}\lambda + C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

d) I: $y(0) = 1 = \frac{5}{2}\lambda + C_1 + C_2$

II: $y(2) = 0 = \frac{5}{2}\lambda + C_1 e^2 + C_2 \frac{1}{e^2}$

$$0 = \int_0^2 g(x)\,dx = \left[\frac{5}{2}\lambda x + C_1 e^{x} - C_2 e^{-x}\right]_0^2$$

$$= 5\lambda + C_1(e^2 - 1) - C_2(e^{-2} - 1)$$

III: $0 = 5\lambda + C_1(e^2 - 1) - C_2\left(\frac{1}{e^2} - 1\right)$