

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 25.06.2021) *(mit Lösung)*

— Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min. —

| | | |
|-----------------------|------------------|-----------------------------|
| | | |
| ↑ <i>FAMILIENNAME</i> | ↑ <i>Vorname</i> | ↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i> |

| | | | |
|---------------|-----------|-----------|------------------------------|
| <i>1.</i> | <i>2.</i> | <i>3.</i> | <i>gesamt</i> <div></div> |
| <i>Punkte</i> | | | <i>maximal 18</i> |

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden **Kästchen** eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

• **Aufgabe 1.**

- a) (2 Punkte) Eine Ameise möchte eine 1×1 Meter Sandkiste durchqueren. Sie befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Eingang der Sandkiste bei $(x, y) = (0, 0)$ und zum Zeitpunkt T am Ausgang der Sandkiste bei $(x, y) = (1, 1)$. Die Konsistenz des Sandes in der Sandkiste ist in y -Richtung unterschiedlich, in x -Richtung aber homogen. Dadurch ist die Geschwindigkeit der Ameise abhängig von ihrer jeweiligen Position in y -Richtung. Da die Ameise die Sandkiste mehrmals täglich durchqueren muss, möchte sie diejenige Kurve finden, bei der sie die geringste Zeit T benötigt.

Nach mehreren Durchquerungen hat die Ameise die Geschwindigkeitsfunktion $v(y) = \sqrt{2y}$ in Abhängigkeit ihrer Position in der Sandkiste gefunden. Bestimmen Sie ausgehend von

$$T = \int_0^T dt$$

das zu minimierende Funktional

$$I[y] = \int_{x(0)}^{x(T)} f(y, y') dx,$$

wobei T die zu minimierende Dauer der Ameise in der Sandkiste ist.

Hinweis: Für das Bogenelement ds gilt $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Umformen liefert den folgenden Ausdruck.

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{s(T)} \frac{dt}{ds} ds = \int_0^{s(T)} \frac{ds}{v}$$

Einsetzen von $v(y) = \sqrt{2y}$ und $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$ gibt das zu minimierende Funktional.

$$I[y] = \int_{x(0)}^{x(T)} f(y, y') dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2y}} dx \quad (1)$$

- b) (1.5 Punkte) Finden Sie eine Differentialgleichung für jene Funktion $y(x)$, die das in Unterpunkt a) berechnete Funktional $I[y]$ minimiert. Benutzen Sie dabei die Form der Euler-Lagrange Gleichung für $f = f(y, y')$ und berechnen Sie daraus y' . Begründen Sie, warum Sie jeden Schritt der Herleitung durchführen dürfen.

Mit $f(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2y}}$ folgt aus der Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

aufgrund der expliziten Unabhängigkeit von $f(y, y')$ von x , dass

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = c.$$

Einsetzen liefert folgende Lösung.

$$y' = \sqrt{\frac{1 - 2c^2 y}{2c^2 y}}$$

c) (1.5 Punkte) Finden Sie die Euler-Lagrange Gleichung für $x(t)$, welche das Wirkungsintegral

$$I[x] := \int_0^1 \left(\frac{1}{2} m(x')^2 - \frac{1}{2} b x^2 \right) dt$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_0^1 x^2 dt - 2 = 0$$

minimiert.

Mithilfe der Euler-Lagrange Gleichung ergibt sich aus der Aufgabenstellung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial x'} \right) = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Auswerten für

$$h(t, x, x') = \frac{1}{2} m(x')^2 - \frac{1}{2} b x^2 + \lambda x^2$$

ergibt für die linke Seite der Gleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial x'} \right) = \frac{d}{dt} (m x') = m x''.$$

Die rechte Seite der Gleichung ergibt

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -b x + 2 \lambda x = x(-b + 2 \lambda).$$

Zusammen ergibt sich damit die folgende Differentialgleichung

$$m x'' = x(-b + 2 \lambda).$$

- d) (1 Punkt) Lösen Sie, die in Unterpunkt c) erhaltene Gleichung für $b = 0$, $m = 1$. Diese Lösung hängt von drei Konstanten ab. Geben Sie das Gleichungssystem an, das diese Konstanten erfüllen, wobei, die Nebenbedingung und die beiden Randbedingungen $x(0) = 0$ und $x(1) = 1$ gelten. Vereinfachen Sie das System so weit, dass in der Nebenbedingung nur die Unbekannte λ auftritt. Das Lösen dieser nichtlinearen Gleichung ist nicht mehr notwendig.

Hinweis: Machen Sie den Ansatz $x(t) = e^{at}$. Es gilt $\sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.

Mit den Werten ergibt sich die folgende Gleichung.

$$x'' = 2\lambda x$$

Die Verwendung des Ansatzes führt auf $a = \sqrt{2\lambda}$ und

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{2\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{2\lambda}t}.$$

Das Gleichungssystem für die Konstanten c_1 , c_2 , und λ lautet:

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 = 0, \\ x(1) &= c_1 e^{\sqrt{2\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{2\lambda}} = 1, \\ \int_0^1 (x(t))^2 dt - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Aus den zwei ersten Gleichungen ergibt sich

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{2 \sinh(\sqrt{2\lambda})}.$$

Schlussendlich ergibt sich damit

$$x(t) = \frac{1}{\sinh(\sqrt{2\lambda})} \sinh(\sqrt{2\lambda}t)$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sinh(\sqrt{2\lambda})} \sinh(\sqrt{2\lambda}t) \right)^2 dt - 2 = 0.$$

• Aufgabe 2.

a) (3,5 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion $f(x)$.

$$f(x) = x^2 e^{-4|x|}$$

Hinweis: Integrieren Sie zuerst partiell: $\int x^2 e^{\alpha x} dx$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-4|x|} e^{-ikx} dx$$

Zunächst löst man den Betrag auf.

$$= \int_{-\infty}^0 x^2 e^{(4-ik)x} dx + \int_0^{\infty} x^2 e^{-(4+ik)x} dx$$

Nun muss zweimal partiell integriert werden. Für das erste Integral erhalten wir:

$$\begin{aligned} &= \frac{x^2}{4-ik} e^{(4-ik)x} \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{2x}{4-ik} e^{(4-ik)x} dx \\ &= \left(\frac{x^2}{4-ik} - \frac{2x}{(4-ik)^2} \right) e^{(4-ik)x} \Big|_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \frac{2}{(4-ik)^2} e^{(4-ik)x} dx \\ &= \left(\frac{x^2}{4-ik} - \frac{2x}{(4-ik)^2} + \frac{2}{(4-ik)^3} \right) e^{(4-ik)x} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{2}{(4-ik)^3}. \end{aligned}$$

Für das zweite Integral erhalten wir:

$$\begin{aligned} &= -\frac{x^2}{4+ik} e^{-(4+ik)x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2x}{4+ik} e^{-(4+ik)x} dx \\ &= -\left(\frac{x^2}{4+ik} + \frac{2x}{(4+ik)^2} \right) e^{-(4+ik)x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2}{(4+ik)^2} e^{-(4+ik)x} dx \\ &= -\left(\frac{x^2}{4+ik} + \frac{2x}{(4+ik)^2} + \frac{2}{(4+ik)^3} \right) e^{-(4+ik)x} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{2}{(4+ik)^3}. \end{aligned}$$

Als Endergebnis ergibt sich:

$$\hat{f}(k) = \frac{2}{(4-ik)^3} + \frac{2}{(4+ik)^3}.$$

- b) (2,5 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f(x)$ unter Verwendung der Linearität der Fouriertransformation, sowie der Ableitungsregeln der Fouriertransformierten.

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 e^{-x^2}$$

Hinweis:

- (1) Zeigen Sie zunächst: $f(x) = -\frac{d}{dx}e^{-x^2} - \frac{1}{6}\frac{d^3}{dx^3}e^{-x^2}$
(2) $\widehat{e^{-x^2}} = \sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}$

Zuerst berechnen wir die ersten drei Ableitungen der Exponentialfunktion:

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}) = -2xe^{-x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{-x^2}) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(e^{-x^2}) = 12xe^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}x^3e^{-x^2} = -\frac{d}{dx}e^{-x^2} - \frac{1}{6}\frac{d^3}{dx^3}e^{-x^2}.$$

Unter Ausnutzung der Linearität folgt nun:

$$\hat{f}(k) = -\widehat{\frac{d}{dx}e^{-x^2}} - \frac{1}{6}\widehat{\frac{d^3}{dx^3}e^{-x^2}}.$$

Nach Verwendung der Ableitungsregeln erhält man:

$$= -ik\widehat{e^{-x^2}} - \frac{1}{6}(ik)^3\widehat{e^{-x^2}}.$$

Mithilfe des Hinweises erhält man das Endergebnis:

$$\hat{f}(k) = ik\left(\frac{k^2}{6} - 1\right) \cdot \sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}.$$

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei der Differentialoperator L mit

$$Lu(x) = u''(x) - 4u'(x) - 5u(x).$$

- a) (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Fundamentallösung zu L . Die bestimmte Lösung soll dabei die Standardbedingungen, wie in der Vorlesung, erfüllen und beschränkt sein mit $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = 0$

Die Fundamentallösung soll $LU(x) = \delta(x)$ erfüllen, daher ist $LU(x) = 0$ für alle $x \neq 0$.

$$LU(x) = U''(x) - 4U'(x) - 5U(x) = 0, \quad \forall x \neq 0$$

Wir machen den Ansatz $U(x) = ae^{\lambda x}$

$$LU(x) = (\lambda^2 - 4\lambda - 5)ae^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3$$

$$U(x) = \begin{cases} a^+ e^{5x} + b^+ e^{-x} & x > 0 \\ a^- e^{5x} + b^- e^{-x} & x < 0 \end{cases}$$

U soll nun einige Bedingungen erfüllen.

- $U(x)$ soll beschränkt sein, damit $\int_{-\infty}^{\infty} U(x - \xi) f(\xi) d\xi$ existiert $\rightarrow a^+ = b^- = 0$.
- $U(x)$ soll stetig sein, damit die Lösung $u(x)$ keinen Knick hat (stetig differenzierbar ist). $U^-(0) = U^+(0) \rightarrow b^+ = a^-$. Damit erhalten wir

$$U(x) = \begin{cases} Ae^{-x} & x > 0 \\ Ae^{5x} & x < 0 \end{cases}$$

- $U''(x)$ verhält sich wie $\delta(x)$, also muss $U'(0+) - U'(0-) = 1$ gelten, woraus $-A - 5A = -6A = 1$ folgt. Alternativ können wir auch die Normierung der Deltafunktion nutzen.

$$LU(x) = \delta(x) \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} LU(x) dx = 1$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\epsilon}^{\epsilon} U''(x) - 4U'(x) - 5U(x) dx \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[U'_+(\epsilon) - U'_-(-\epsilon) - 4(U_+(\epsilon) - U_-(-\epsilon)) - 5 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} U(x) dx \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [-Ae^{-\epsilon} - 5Ae^{-5\epsilon}] = -6A = 1 \end{aligned}$$

Dabei haben wir für den letzten Punkt die Stetigkeit von $U(x)$ und die Tatsache benutzt, dass ein Integral einer stetigen Funktion, für einen verschwindenden Integrationsbereich, gegen Null strebt. Es folgt

$$A = -\frac{1}{6},$$

und damit

$$U(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}e^{-x} & x > 0 \\ -\frac{1}{6}e^{5x} & x < 0 \end{cases}$$

b) (2,5 Punkte) Lösen Sie nun $Lu(x) = 6 \sinh(x/2)$.

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x - \xi) 6 \sinh(\xi/2) d\xi$$

Wir haben die Bereiche von $U(x)$ nach dem Vorzeichen des Arguments aufgeteilt. Das Argument ist nun $(x - \xi)$ weshalb sich die Bereiche zu

$$\begin{aligned} x - \xi < 0 & \text{ für } \xi > x & U_-(x - \xi) \\ x - \xi > 0 & \text{ für } \xi < x & U_+(x - \xi) \end{aligned}$$

ergeben. Wir teilen also das Integral an der Stelle x auf.

$$u(x) = \int_{-\infty}^x U_+(x - \xi) 6 \sinh(\xi/2) d\xi + \int_x^{\infty} U_-(x - \xi) 6 \sinh(\xi/2) d\xi$$

und erhalten

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{-x+\xi} \left(e^{\frac{\xi}{2}} - e^{-\frac{\xi}{2}} \right) d\xi - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} e^{5(x-\xi)} \left(e^{\frac{\xi}{2}} - e^{-\frac{\xi}{2}} \right) d\xi \\ &= -\frac{e^{-x}}{2} \left(\frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}\xi} - 2e^{\frac{\xi}{2}} \right) \Bigg|_{-\infty}^x - \frac{e^{5x}}{2} \left(-\frac{2}{9} e^{-\frac{9}{2}\xi} + \frac{2}{11} e^{-\frac{11}{2}\xi} \right) \Bigg|_x^{\infty} \\ &= \frac{12}{11} e^{-\frac{x}{2}} - \frac{4}{9} e^{\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

c) (0,5 Punkte) Hat $Lu(x) = \sinh(x)$ eine Lösung auf \mathbb{R} ? Argumentieren Sie geschickt anstatt zu rechnen.

Nein, da das Integral

$$\int_{-\infty}^x 1 d\xi$$

im Integrationsbereich divergiert.