Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
SS 2021

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 25.06.2021) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textit{Kästchen}}$ **eingetragenen Antworten.**

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

a) (2 Punkte) Eine Ameise möchte eine 1×1 Meter Sandkiste durchqueren. Sie befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Eingang der Sandkiste bei $(x, y) = (0, 0)$ und zum Zeitpunkt T am Ausgang der Sandkiste bei $(x, y) = (1, 1)$. Die Konsistenz des Sandes in der Sandkiste ist in y-Richung unterschiedlich, in x-Richtung aber homogen. Dadurch ist die Geschwindigkeit der Ameise abhängig von ihrer jeweiligen Position in y-Richtung. Da die Ameise die Sandkiste mehrmals täglich durchqueren muss, möchte sie diejenige Kurve finden, bei der sie die geringste Zeit T benötigt.

Nach mehreren Durchquerungen hat die Ameise die Geschwindigkeitsfunktion $v(y) = \sqrt{4y}$ in Abhängigkeit ihrer Position in der Sandkiste gefunden. Bestimmen Sie ausgehend von

$$T = \int_0^T dt$$

das zu minimierende Funktional

$$I[y] = \int_{x(0)}^{x(T)} f(y, y')dx,$$

wobei T die zu minimierende Dauer der Ameise in der Sandkiste ist.
Hinweis: Für das Bogenelement ds gilt $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Umformen liefert den folgenden Ausdruck.

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{s(T)} \frac{dt}{ds} ds = \int_0^{s(T)} \frac{ds}{v}$$

Einsetzen von $v(y) = \sqrt{4y}$ und $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$ gibt das zu minimierende Funktional.

$$I[y] = \int_{x(0)}^{x(T)} f(y, y')dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{4y}} dx \tag{1}$$

b) (1.5 Punkte) Finden Sie eine Differentialgleichung für jene Funktion $y(x)$, die das in Unterpunkt a) berechnete Funktional $I[y]$ minimiert. Benutzen Sie dabei die Form der Euler-Lagrange Gleichung für $f = f(y, y')$ und berechnen Sie daraus y'. Begründen Sie, warum Sie jeden Schritt der Herleitung durchführen dürfen.

Mit $f(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{4y}}$ folgt aus der Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

aufgrund der expliziten Unabhängigkeit von $f(y, y')$ von x, dass

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = c.$$

Einsetzen liefert folgende Lösung.

$$y' = \sqrt{\frac{1-4c^2y}{4c^2y}}$$

c) (1.5 Punkte) Finden Sie die Euler-Lagrange Gleichung für $x(t)$, welche das Wirkungsintegral

$$I[x] := \int_0^1 \left(\frac{1}{2}m(x')^2 - 2cx^2\right) dt$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_0^1 x^2 dt - 3 = 0$$

minimiert.

Mithilfe der Euler-Lagrange Gleichung ergibt sich aus der Aufgabenstellung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h}{\partial x'}\right) = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Auswerten für

$$h(t, x, x') = \frac{1}{2}m(x')^2 - 2cx^2 + \lambda x^2$$

ergibt für die linke Seite der Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h}{\partial x'}\right) = \frac{d}{dt}(mx') = mx''.$$

Die rechte Seite der Gleichung ergibt

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -4cx + 2\lambda x = x(-4c + 2\lambda).$$

Zusammen ergibt sich damit die folgende Differentialgleichung

$$mx'' = 2x(-2c + \lambda).$$

d) (1 Punkt) Lösen Sie, die in Unterpunkt c) erhaltene Gleichung für $c = 0$, $m = \frac{1}{2}$. Diese Lösung hängt von drei Konstanten ab. Geben Sie das Gleichungssystem an, das diese Konstanten erfüllen, wobei, die Nebenbedingung und die beiden Randbedingungen $x(0) = 0$ und $x(1) = 1$ gelten. Vereinfachen Sie das System so weit, dass in der Nebenbedingung nur die Unbekannte λ auftritt. Das Lösen dieser nichtlinearen Gleichung ist nicht mehr notwendig.
Hinweis: Machen Sie den Ansatz $x(t) = e^{at}$. Es gilt $\sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.

Mit den Werten ergibt sich die folgende Gleichung.

$$x'' = 4\lambda x$$

Die Verwendung des Ansatzes führt auf $a = \sqrt{4\lambda}$ und

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{4\lambda} t} + c_2 e^{-\sqrt{4\lambda} t}.$$

Das Gleichungssystem für die Konstanten c_1, c_2, und λ lautet:

$$\begin{aligned}
&x(0) = c_1 + c_2 = 0, \\
&x(1) = c_1 e^{\sqrt{4\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{4\lambda}} = 1, \\
&\int_0^1 (x(t))^2 dt - 3 = 0.
\end{aligned}$$

Aus den zwei ersten Gleichungen ergibt sich

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{2\sinh(\sqrt{4\lambda})}.$$

Schlussendlich ergibt sich damit

$$x(t) = \frac{1}{\sinh(\sqrt{4\lambda})} \sinh(\sqrt{4\lambda} t)$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sinh(\sqrt{4\lambda})} \sinh(\sqrt{4\lambda} t) \right)^2 dt - 3 = 0.$$

- **Aufgabe 2.**

a) (3,5 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion $f(x)$.

$$f(x) = x^2 e^{-|x|}$$

Hinweis: *Integrieren Sie zuerst partiell:* $\int x^2 e^{\alpha x} \mathrm{d}x, \quad \alpha \in \mathbb{C}$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} e^{-ikx} \mathrm{d}x$$

Zunächst löst man den Betrag auf.

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 e^{(1-ik)x} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-(1+ik)x} \mathrm{d}x$$

Nun muss zweimal partiell integriert werden. Für das erste Integral erhalten wir:

$$= \frac{x^2}{1-ik} e^{(1-ik)x} \Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{1-ik} e^{(1-ik)x} \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{1-ik} - \frac{2x}{(1-ik)^2} \right) e^{(1-ik)x} \Big|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{(1-ik)^2} e^{(1-ik)x} \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{1-ik} - \frac{2x}{(1-ik)^2} + \frac{2}{(1-ik)^3} \right) e^{(1-ik)x} \Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{2}{(1-ik)^3}.$$

Für das zweite Integral erhalten wir:

$$= -\frac{x^2}{1+ik} e^{-(1+ik)x} \Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \frac{2x}{1+ik} e^{-(1+ik)x} \mathrm{d}x$$

$$= -\left(\frac{x^2}{1+ik} + \frac{2x}{(1+ik)^2} \right) e^{-(1+ik)x} \Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \frac{2}{(1+ik)^2} e^{-(1+ik)x} \mathrm{d}x$$

$$= -\left(\frac{x^2}{1+ik} + \frac{2x}{(1+ik)^2} + \frac{2}{(1+ik)^3} \right) e^{-(1+ik)x} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{2}{(1+ik)^3}.$$

Als Endergebnis ergibt sich:

$$\hat{f}(k) = \frac{2}{(1-ik)^3} + \frac{2}{(1+ik)^3}.$$

b) (2,5 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f(x)$ unter Verwendung der Linearität der Fouriertransformation, sowie der Ableitungsregeln der Fouriertransformierten.

$$f(x) = 4x^3 e^{-x^2}$$

Hinweis:
(1) *Zeigen Sie zunächst:* $f(x) = -3\frac{d}{dx}e^{-x^2} - \frac{1}{2}\frac{d^3}{dx^3}e^{-x^2}$
(2) $\widehat{e^{-x^2}} = \sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}$

Zuerst berechnen wir die ersten drei Ableitungen der Exponentialfunktion:

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}) = -2xe^{-x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{-x^2}) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(e^{-x^2}) = 12xe^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow 4x^3e^{-x^2} = -3\frac{d}{dx}e^{-x^2} - \frac{1}{2}\frac{d^3}{dx^3}e^{-x^2}.$$

Unter Ausnutzung der Linearität folgt nun:

$$\hat{f}(k) = -3\widehat{\frac{d}{dx}e^{-x^2}} - \frac{1}{2}\widehat{\frac{d^3}{dx^3}e^{-x^2}}.$$

Nach Verwendung der Ableitungsregeln erhält man:

$$= -3ik\widehat{e^{-x^2}} - \frac{1}{2}(ik)^3\widehat{e^{-x^2}}.$$

Mithilfe des Hinweises erhält man das Endergebnis:

$$\hat{f}(k) = ik(\frac{k^2}{2} - 3) \cdot \sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}.$$

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei der Differentialoperator L mit

$$Lu(x) = u''(x) - 5u'(x) + 4u(x).$$

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Fundamentallösung zu L. Die bestimmte Lösung soll dabei die Standardbedingungen, wie in der Vorlesung, erfüllen und beschränkt sein mit $\lim_{x\to+\infty} U(x) = \lim_{x\to-\infty} U(x) = 0$.

Die Fundamentallösung soll $LU(x) = \delta(x)$ erfüllen, daher ist $LU(x) = 0$ für alle $x \neq 0$.

$$LU(x) = U''(x) - 5U'(x) + 4U(x) = 0, \ \forall x \neq 0$$

Wir machen den Ansatz $U(x) = ae^{\lambda x}$

$$LU(x) = (\lambda^2 - 5\lambda + 4)ae^{\lambda x} = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$U(x) = \begin{cases} a^+e^{4x} + b^+e^x & x > 0 \\ a^-e^{4x} + b^-e^x & x < 0 \end{cases}$$

U soll nun einige Bedingungen erfüllen.

- $U(x)$ soll beschränkt sein, damit $\int_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi)f(\xi)d\xi$ existiert $\to a^+ = b^+ = 0$.
- U(x) soll stetig sein, damit die Lösung $u(x)$ keinen Knick hat (stetig differenzierbar ist). $U^-(0) = U^+(0) = 0 \to a^- = -b^-$. Damit erhalten wir

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ Ae^{4x} - Ae^x & x < 0 \end{cases}$$

- $U''(x)$ verhält sich wie $\delta(x)$, also muss $U'(0+) - U'(0-) = 1$ gelten, woraus $-4A + A = -3A = 1$ folgt. Alternativ können wir auch die Normierung der Deltafunktion nutzen.
  $LU(x) = \delta(x) \Rightarrow \lim\limits_{\epsilon\to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} LU(x)dx = 1$

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\epsilon}^{\epsilon} U''(x) - 5U'(x) + 4U(x)dx\right] \\ =&\lim_{\epsilon\to 0}\left[U'_+(\epsilon) - U'_-(-\epsilon) - 5\big(U_+(\epsilon) - U_-(-\epsilon)\big) + 4\int_{-\epsilon}^{\epsilon} U(x)dx\right] \\ =&\lim_{\epsilon\to 0}\left[-4Ae^{4\epsilon} + Ae^{\epsilon}\right] = -3A = 1 \end{aligned}$$

Dabei haben wir für den letzten Punkt die Stetigkeit von $U(x)$ und die Tatsache benutzt, dass ein Integral einer stetigen Funktion, für einen verschwindenden Integrationsbereich, gegen Null strebt. Es folgt

$$A = -\frac{1}{3},$$

und damit

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{4x} & x < 0 \end{cases}$$

b) (2,5 Punkte) Lösen Sie nun $Lu(x) = 3\left(e^{-2x} - e^{\frac{x}{2}}\right)$.

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi)\,3\left(e^{-2x} - e^{\frac{x}{2}}\right)d\xi$$

Wir haben die Bereiche von $U(x)$ nach dem Vorzeichen des Arguments aufgeteilt. Das Argument ist nun $(x-\xi)$ weshalb sich die Bereiche zu

$$\begin{aligned} x-\xi &< 0 \text{ für } \xi > x \quad U_-(x-\xi) \\ x-\xi &> 0 \text{ für } \xi < x \quad U_+(x-\xi) \end{aligned}$$

ergeben. Wir teilen also das Integral an der Stelle x auf.

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,d\xi + \int_{x}^{\infty} U_-(x-\xi)\,3\left(e^{-2x} - e^{\frac{x}{2}}\right)d\xi$$

und erhalten

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_x^\infty e^{x-\xi}\left(e^{-2\xi} - e^{\frac{\xi}{2}}\right)d\xi - \int_x^\infty e^{4x-4\xi}\left(e^{-2\xi} - e^{\frac{\xi}{2}}\right)d\xi \\ &= e^x\left(-\frac{1}{3}e^{-3\xi} + 2e^{-\frac{\xi}{2}}\right)\Bigg|_x^\infty - e^{4x}\left(-\frac{1}{6}e^{-6\xi} + \frac{2}{7}e^{-\frac{7}{2}\xi}\right)\Bigg|_x^\infty \\ &= \frac{1}{6}e^{-2x} - \frac{12}{7}e^{\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

c) (0,5 Punkte) Hat $Lu(x) = (e^{-2x} - e^x)$ eine Lösung auf $\mathbb{R}$? Argumentieren Sie geschickt anstatt zu rechnen.

Nein, da das Integral

$$\int_x^\infty 1 d\xi$$

im Integrationsbereich divergiert.