Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
SS 2021

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Nachtest (FR, 06.08.2021) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	2.	3.	gesamt
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

a) (2 Punkte) Finden Sie die Euler-Lagrange Gleichung für $x(t)$, welche das Wirkungsintegral

$$I[x] := \int_0^1 \left(\frac{1}{2}a(x')^2 - bx^4 + cx^2\right) dt$$

minimiert. Dabei sind a, b und c reelle Konstanten.

Mithilfe der Euler-Lagrange Gleichung ergibt sich aus der Aufgabenstellung

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial f}{\partial x'}) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Auswerten für

$$f(t,x,x') = \frac{1}{2}a(x')^2 - bx^4 + cx^2$$

ergibt für die linke Seite der Gleichung

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial f}{\partial x'}) = \frac{d}{dt}(ax') = ax''.$$

Die rechte Seite der Gleichung ergibt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4bx^3 + 2cx.$$

Zusammen ergibt sich damit die folgende Differentialgleichung

$$ax'' = -4bx^3 + 2cx.$$

b) (1 Punkt) Finden Sie einen passenden Anatz, mit dem die im Unterpunkt a) erhaltene Differentialgleichung für $c > 0$, $b = 0$ und $a = 1$ gelöst werden kann. Finden Sie anschließend mithilfe des Ansatzes eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Unter Verwendung von $b = 0$ und $a = 1$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$x'' = 2cx.$$

Für $c > 0$ kann der Ansatz $x(t) = e^{st}$ verwendet werden.
Die Verwendung des Ansatzes führt auf $s = \pm\sqrt{2c}$ und

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{2c}t} + c_2 e^{-\sqrt{2c}t}.$$

c) (2 Punkte) Finden Sie die Euler-Lagrange Gleichung für $y(t)$, welche das Wirkungsintegral

$$I[y] := \int_0^1 \left(\frac{k}{2}(ay^2 + (y')^2) \right) dt$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_0^1 \frac{1}{y+1} dt - \frac{\ln(\frac{2}{3})}{3} = 0$$

minimiert. Dabei sind k und a reelle Konstanten.

Mithilfe der Euler-Lagrange Gleichung ergibt sich aus der Aufgabenstellung

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial h}{\partial y'}) = \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Auswerten für

$$h(t, y, y') = \frac{k}{2}(ay^2 + (y')^2) + \frac{\lambda}{y+1}$$

ergibt für die linke Seite der Gleichung

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial h}{\partial y'}) = \frac{d}{dt}(ky') = ky''.$$

Die rechte Seite der Gleichung ergibt

$$\frac{\partial f}{\partial y} = kay - \frac{\lambda}{(y+1)^2}.$$

Zusammen ergibt sich damit die folgende Differentialgleichung

$$ky'' = kay - \frac{\lambda}{(y+1)^2}.$$

d) (1 Punkt) Lösen Sie die im Unterpunkt c) erhaltene Gleichung für $a = 0$ und $\lambda = 0$ unter den Randbedingungen $y(0) = -10$ und $y(1) = -7$.

Einsetzen der Werte liefert die Differentialgleichung

$$ky'' = 0.$$

Diese kann leicht durch

$$y(t) = c_1 t + c_2$$

gelöst werden. Aus der Randbedingung $y(0) = -10$ folgt $c_2 = -10$. Damit folgt für c_1:

$$y(1) = c_1 + c_2 = c_1 - 10 = -7 \quad => c_1 = 3$$

Somit ergibt sich die Lösung

$$y(t) = 3t - 10.$$

- **Aufgabe 2.** Die Dynamik eines Systems wird durch den Differentialoperator

$$Lu(x) = u''(x) + 2u'(x) + 2u(x)$$

beschrieben

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Fundamentallösung zu L, welche die Standardbedingungen der Vorlesung erfüllt und mit $\lim_{x\to+\infty} U(x) = \lim_{x\to-\infty} U(x) = 0$ beschränkt ist.

Die Fundamentallösung soll $LU(x) = \delta(x)$ erfüllen, daher ist $LU(x) = 0$ für alle $x \neq 0$.

$$LU(x) = U''(x) + 2U'(x) + 2U(x) = 0, \ \forall x \neq 0$$

Wir machen den Ansatz $U(x) = ae^{\lambda x}$

$$LU(x) = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)ae^{\lambda x} = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

$$U(x) = \begin{cases} a^+ e^{-x+ix} + b^+ e^{-x-ix} & x > 0 \\ a^- e^{-x+ix} + b^- e^{-x-ix} & x < 0 \end{cases}$$

U soll nun einige Bedingungen erfüllen.

- Es ist notwendig (jedoch abhängig von $f(x)$ nicht hinreichend), dass $U(x)$ beschränkt ist, damit $\int_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi) f(\xi) d\xi$ existiert $\to a^- = b^- = 0$.
- $U(x)$ soll stetig sein, damit die Lösung $u(x)$ keinen Knick hat (stetig differenzierbar ist). $U^-(0) = U^+(0)$.
$$a^+ + b^+ = 0 \ \to \ a^+ = -b^+ = a$$
- $U''(x)$ verhält sich wie $\delta(x)$, also muss $U'(0+) - U'(0-) = 1$ gelten, woraus
$$a(-1+i+1+i) = 2ia = 1$$
folgt.

Wir erhalten also

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2i} e^{-x}(e^{ix} - e^{-ix}) = e^{-x}\sin(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie nun mittels der Fundamentallösung eine Lösung für $Lu(x) = f(x) = e^{-x/2}$ durch Berechnung von $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi) f(x - \xi) d\xi$.

Hinweis: Sie benötigen partielle Integration. Falls die Lösung von a) nicht geklappt hat verwenden Sie $U(x) = e^{-x} \sin(x)$ für $x > 0$, sonst $U(x) = 0$.

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi)\, e^{-x/2+\xi/2} d\xi$$

Wir setzen für $U(x)$ ein und wenden partielle Integration an.

$$u(x) = e^{-x/2} \int_0^{\infty} e^{-\xi/2} \sin(\xi) d\xi$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi/2} \sin(\xi) d\xi = -e^{-\xi/2} \cos(\xi)\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\xi/2} \cos(\xi) d\xi$$

$$= 1 - \frac{1}{2} e^{-\xi/2} \sin(\xi)\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-\xi/2} \sin(\xi) d\xi$$

$$\frac{5}{4} \int_0^{\infty} e^{-\xi/2} \sin(\xi) d\xi = 1$$

Wir erhalten schließlich

$$u(x) = \frac{4}{5} e^{-x/2}.$$

- **Aufgabe 3.**

a) (1 Punkt) Geben Sie ein Argument für die Existenz der Potentialfunktion $\Phi(x, y, z)$ eines Vektorfeldes $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ an.

$\nabla \times \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, in $G \subset \mathbb{R}^3$, G einfach zusammenhängendes Gebiet $\Rightarrow \exists \Phi(x, y, z)$ mit $\nabla \Phi = \boldsymbol{a}$

b) (5 Punkte) Gegeben seien folgende Vektorfelder:

$$\boldsymbol{a}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 + yz \\ 1 + xz \\ 1 + xy \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(x, y, z) = \begin{pmatrix} (x^2+1)yz \\ -2(y^2+1)xz \\ (z^2+1)xy \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ und $\boldsymbol{b}(x, y, z)$ auf Quellen- und Wirbelfreiheit. Bestimmen Sie eine Potentialfunktion $\Phi(x, y, z)$ zum Vektorfeld $\boldsymbol{a}$. Geben Sie den Wert für $\Phi(1, 1, 1)$ an, wenn die freie Konstante gleich Null ist.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \text{Quellenfreiheit}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{b} = 2xyz - 4xyz + 2xyz = 0 \Rightarrow \text{Quellenfreiheit}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x - x \\ -(y - y) \\ z - z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \text{Wirbelfreiheit}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x(z^2+1) + 2x(y^2+1) \\ y(x^2+1) - y(z^2+1) \\ -2z(y^2+1) - z(x^2+1) \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \text{keine Wirbelfreiheit}$$

Da $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet ($\mathbb{R}^3$) liegt existiert ein Potential zum Vektorfeld $\boldsymbol{a}$.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 + yz \Rightarrow \Phi(x, y, z) = x + xyz + c_1(y, z)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = xz + \frac{\partial c_1}{\partial y} = 1 + xz \Rightarrow \frac{\partial c_1}{\partial y} = 1 \Rightarrow c_1(y, z) = y + c_2(z)$$

$$\Phi(x, y, z) = x + y + xyz + c_2(z) \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial z} = xy + c_2'(z) = 1 + xy \Rightarrow c_2'(z) = 1 \Rightarrow c_2(z) = z + c_3$$

Somit ergibt sich das gesuchte Potential als

$$\Phi(x, y, z) = x + y + z + xyz + c_3.$$

$$\Phi(1, 1, 1) = 4$$