

# PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

## Test 1 (Fr, 29.04.2022) *(mit Lösung)*

— Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i> <div></div>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,  
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

•

• **Aufgabe 1.**

Gegeben sei das Vektorfeld

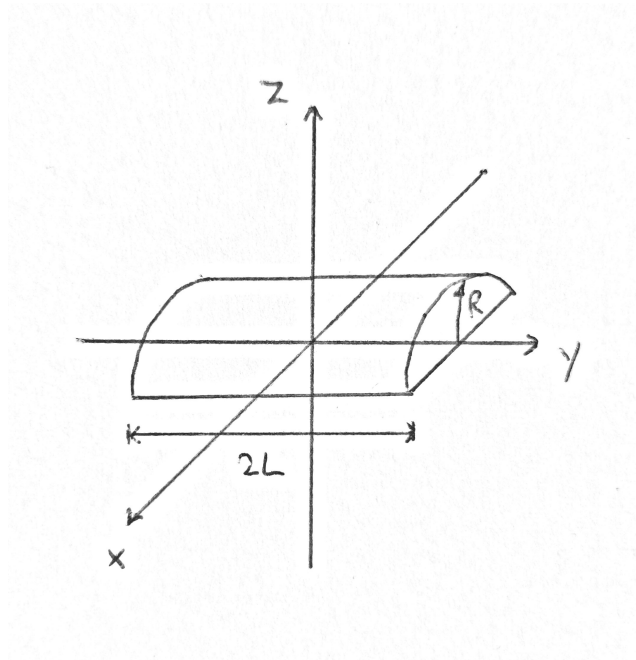
$$\mathbf{a}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ 2y \\ -yz \end{pmatrix}$$

und das Volumen

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 9, \quad -2 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z\}.$$

a) (1 Punkt) Skizzieren Sie das Volumen  $V$ .

Bei dem Volumen handelt es sich um einen halben liegenden Zylinder mit Radius  $R = 3$  und Länge  $2L = 4$ .



b) (4 Punkte) Berechnen Sie durch explizite Integration den Fluss des Vektorfeldes  $\mathbf{a}$  durch die beiden Enden des Zylinders. Für den Mantel und den Boden ergeben sich die jeweiligen Integrale zu Null und müssen daher nicht berechnet werden.

Der Rand des Volumens besteht aus vier Flächen. Deshalb kann das Flächenintegral in vier einzelne Integrale geteilt werden.

$$\int_{\partial V} \mathbf{a} d\mathbf{S} = \int_{\text{Mantel}} \mathbf{a} d\mathbf{S}_{\text{Mantel}} + \int_{\text{Front}} \mathbf{a} d\mathbf{S}_{\text{Front}} + \int_{\text{Rück}} \mathbf{a} d\mathbf{S}_{\text{Rück}} + \int_{\text{Boden}} \mathbf{a} d\mathbf{S}_{\text{Boden}}$$

Laut Angabe sind die Integrale der Mantel- und Bodenfläche 0 und müssen nicht berechnet werden. Der Vollständigkeit halber wird es hier trotzdem ausgeführt. Zuerst müssen die Flächenelemente berechnet werden, dazu wählen wir für das jeweilige Element die richtige Parametrisierung und berechnen den Normalvektor auf die Fläche. Für den Mantel  $S_1$  verwenden wir Zylinderkoordinaten, für den rechten Deckel  $S_2$  und den linken Deckel  $S_3$  Polarkoordinaten und für den Boden  $S_4$  kartesische Koordinaten.

$$d\mathbf{S}_1 = \mathbf{n}_1 \cdot d(y, \phi), \quad d\mathbf{S}_2 = \mathbf{n}_2 \cdot d(r, \phi), \quad d\mathbf{S}_3 = \mathbf{n}_3 \cdot d(r, \phi), \quad d\mathbf{S}_4 = \mathbf{n}_4 \cdot d(x, y)$$

Damit wir die Normalvektoren auf das jeweilige Flächenelement berechnen können schreiben wir unsere gewählte Parametrisierung explizit an.

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \cos(\phi) \\ y \\ 3 \sin(\phi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ 2 \\ r \sin(\phi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ -2 \\ r \sin(\phi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \sin(\phi) \\ 0 \\ 3 \cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cos(\phi) \\ 0 \\ 3 \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ 0 \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin(\phi) \\ 0 \\ r \cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_2$$

$$\mathbf{n}_4 = \frac{\partial \mathbf{r}_4}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{r}_4}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

An dieser Stelle empfiehlt es sich zu überprüfen, ob die Orientierung der Normalvektoren korrekt ist. Im nächsten Schritt können mithilfe der Flächenelemente die Integrale berechnet werden.

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \mathbf{a} d\mathbf{S}_1 &= \int_{-2}^2 \int_0^\pi \begin{pmatrix} 3y \cos(\phi) \\ 2y \\ -3y \sin(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cos(\phi) \\ 0 \\ 3 \sin(\phi) \end{pmatrix} d\phi dy = \\ &= \int_{-2}^2 \int_0^\pi 9y^2(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) d\phi dy = 0 \\ \int_{S_2} \mathbf{a} d\mathbf{S}_2 &= \int_0^\pi \int_0^3 \begin{pmatrix} 2r \cos(\phi) \\ 4 \\ -2r \sin(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} dr d\phi = \int_0^\pi \int_0^R 4r dr d\phi = 18\pi \\ \int_{S_3} \mathbf{a} d\mathbf{S}_3 &= \int_0^\pi \int_0^3 \begin{pmatrix} -2r \cos(\phi) \\ -4 \\ 2r \sin(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} dr d\phi = \int_0^\pi \int_0^R 4r dr d\phi = 18\pi \\ \int_{S_4} \mathbf{a} d\mathbf{S}_4 &= \int_{S_4} \begin{pmatrix} xy \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx dy = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt als Endresultat:

$$\int_{\partial V} \mathbf{a} d\mathbf{S} = 36\pi$$

c) (1 Punkt) Verifizieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe des Satzes von Gauß.

$$\int_{\partial V} \mathbf{a} \, d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} \, dV$$

Zuerst berechnen wir die Divergenz des Vektorfeldes.

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = y + 2 - y = 2$$

Nun kann das Integral direkt ausgerechnet werden.

$$\int_V 2 \, dV = 2 \int_{-2}^2 \int_0^3 \int_0^\pi r \, d\phi \, dr \, dy = 2\pi \cdot \frac{9}{2} \cdot 4 = 36\pi$$

• Aufgabe 2.

a) (6 Punkte) Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -xe^{y^2} \cdot \sin\left(\frac{z^2+x^2}{2}\right) \\ 2ye^{y^2} \cdot \left[\ln(z^2+y^2) + \frac{1}{z^2+y^2} + \cos\left(\frac{z^2+x^2}{2}\right)\right] \\ ze^{y^2} \cdot \left[\frac{2}{z^2+y^2} - \sin\left(\frac{z^2+x^2}{2}\right)\right] \end{pmatrix}$$

das Potential  $\phi$ , für das  $\mathbf{a} = \nabla \phi$  gilt. Wirbelfreiheit von  $\mathbf{a}$  kann angenommen werden.

**Hinweis:** Bei Integralen, die eine pythagoräische Summe zweier Variablen  $(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2$  enthalten, hilft die Substitution  $u = (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2$ .

Die Integrale  $\int \frac{e^x}{x} dx$  und  $\int e^x \cdot \ln(x) dx$  sind nur mit einer speziellen Funktion lösbar und sollen hier nicht berechnet werden. Wenden Sie vielmehr partielle Integration auf das erste Integral,  $\int \frac{e^x}{x} dx$ , an, und rechnen Sie mit dem Ergebnis  $\int \frac{e^x}{x} dx = e^x \cdot \ln(x) - \int e^x \cdot \ln(x) dx$  weiter.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &\stackrel{!}{=} -e^{y^2} x \cdot \sin\left(\frac{z^2+x^2}{2}\right) \\ \Rightarrow \phi &= \int -e^{y^2} x \cdot \sin\left(\frac{z^2+x^2}{2}\right) dx = \left| \begin{matrix} u = z^2 + x^2 \\ dx = \frac{du}{2x} \end{matrix} \right| = \int -e^{y^2} \frac{x}{2x} \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right) du \\ &= e^{y^2} \cdot \cos\left(\frac{z^2+x^2}{2}\right) + b(y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 2ye^{y^2} \cdot \cos\left(\frac{z^2+x^2}{2}\right) + \frac{\partial b}{\partial y} \stackrel{!}{=} ye^{y^2} \left[ 2 \cdot \ln(z^2+y^2) + \frac{2}{z^2+y^2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{z^2+x^2}{2}\right) \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial y} &= 2ye^{y^2} \cdot \left( \ln(z^2+y^2) + \frac{1}{z^2+y^2} \right) \\ \Rightarrow b &= \int \frac{\partial b}{\partial y} dy = \left| \begin{matrix} w = z^2 + y^2 \\ dy = \frac{dw}{2y} \end{matrix} \right| = \frac{2}{2e^{z^2}} \cdot \left( \int e^w \cdot \ln(w) dw + \int \frac{e^w}{w} dw \right) \end{aligned}$$

Hier verwenden wir den Hinweis:

$$\int \frac{e^w}{w} dw = e^w \cdot \ln(w) - \int e^w \cdot \ln(w) dw$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b &= e^{-z^2} \cdot \left( \int e^w \cdot \ln(w) dw + e^w \cdot \ln(w) - \int e^w \cdot \ln(w) dw \right) \\ &= e^{w-z^2} \cdot \ln(w) + c(z) \\ &= e^{y^2} \cdot \ln(z^2+y^2) + c(z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi = e^{y^2} \cdot \left[ \cos\left(\frac{z^2+x^2}{2}\right) + \ln(z^2+y^2) \right] + c(z)$$

Wir brauchen nur mehr  $c(z)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial z} &= -e^{y^2} z \cdot \sin\left(\frac{z^2 + x^2}{2}\right) + 2ze^{y^2} \cdot \frac{1}{z^2 + y^2} + \frac{\partial c(z)}{\partial z} \\ &\stackrel{!}{=} e^{y^2} z \cdot \left[ -\sin\left(\frac{z^2 + x^2}{2}\right) + \frac{2}{z^2 + y^2} \right] \\ &\Rightarrow \frac{\partial c(z)}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow c(z) = \text{const.} = C\end{aligned}$$

Wir können nun  $\phi$  angeben:

$$\phi(x, y, z) = e^{y^2} \cdot \left[ \cos\left(\frac{z^2 + x^2}{2}\right) + \ln(z^2 + y^2) \right] + C$$

- b) **Bonusfrage (1 Punkt):** In welchem Bereich ist das Vektorfeld  $\mathbf{a}$  nicht definiert? Begründe, ob und in welchem Bereich es folglich ein Gradientenfeld ist, d.h. das Potential  $\phi(x, y, z)$  existiert.

Ein Potential existiert für einfach zusammenhängende Teilgebiete im  $\mathbb{R}^3$  für die  $z^2 + y^2 \neq 0$  gilt, d.h. Gebiete im  $\mathbb{R}^3$ , die die x-Achse nicht enthalten.

• **Aufgabe 3.**

Gegeben sei die Parameterdarstellung einer Fläche  $F$  im  $\mathbb{R}^3$

$$F = \left\{ \mathbf{f} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{f}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} z \cos \varphi \\ z \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \varphi \in [0, 2\pi), z \in [1, 2] \right\}.$$

a) (1.5 Punkte) Berechnen Sie den Maßtensor  $M$  der gegebenen Fläche.

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varphi} &= \begin{pmatrix} -z \sin \varphi \\ z \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varphi} &= z^2 \sin^2 \varphi + z^2 \cos^2 \varphi = z^2 \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 1 = 2 \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varphi} = -z \cos \varphi \sin \varphi + z \sin \varphi \cos \varphi + 0 = 0 \\ \implies M &= \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) (1.5 Punkte) Finden Sie den Normalvektor  $\mathbf{n}(\varphi, z)$  auf die Fläche  $F$  und verifizieren Sie die Identität  $\sqrt{\det M} = \|\mathbf{n}\|$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} = \begin{pmatrix} -z \sin \varphi \\ z \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \cos \varphi \\ z \sin \varphi \\ -z \end{pmatrix} \\ \|\mathbf{n}\| &= \sqrt{2z^2} = \sqrt{2}z \\ \sqrt{\det M} &= \sqrt{2z^2} = \sqrt{2}z \\ \implies \|\mathbf{n}\| &= \sqrt{\det M} \end{aligned}$$

c) (3 Punkte) Berechnen Sie das Flußintegral des Vektorfeldes

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} x^{-1} \\ y^{-1} \\ x^2 \end{pmatrix}$$

durch die Fläche  $F$ . *Hinweis:*  $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi$

$$I = \int_F \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_{h_0}^{h_1} \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{f}(\varphi, z)) \cdot \mathbf{n}(\varphi, z) d\varphi dz$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{f}(\varphi, z)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z \cos \varphi} \\ \frac{1}{z \sin \varphi} \\ z^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{f}(\varphi, z)) \cdot \mathbf{n}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z \cos \varphi} \\ \frac{1}{z \sin \varphi} \\ z^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \cos \varphi \\ z \sin \varphi \\ -z \end{pmatrix} = 2 - z^3 \cos^2 \varphi$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{h_0}^{h_1} \int_0^{2\pi} 2 - z^3 \cos^2 \varphi d\varphi dz = 4\pi(h_1 - h_0) - \frac{1}{4}(h_1^4 - h_0^4) \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \\ &= 4\pi(h_1 - h_0) - \frac{\pi}{4}(h_1^4 - h_0^4) = |h_0 = 1, h_1 = 2| = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$