Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2023

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test (Fr, 28.04.2023) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

a) (3 Punkte) Gegeben sei ein Vektorfeld

$$\mathbf{a}(x,y) = \begin{pmatrix} a_x(x,y) \\ a_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{x-1}) \\ xy \end{pmatrix}$$

und eine Kurve, die wie folgt parametrisiert ist:

$$C = \left\{ \mathbf{r}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \;\; t \in [0,1] \right\}$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes

$$\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}.$$

$$\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_C a_x dx + a_y dy = \int_0^1 (a_x(x(t),y(t))x'(t) + a_y(x(t),y(t))y'(t))dt =$$
$$\int_0^1 \sin(t)\, 2t\, dt + \int_0^1 (1+t^2)t^3\, 3t^2\, dt = 2(-t\cos(t)|_0^1 + \int_0^1 \cos(t)\, dt) + 3\int_0^1 (t^5+t^7)\, dt =$$
$$2(\sin(1) - \cos(1)) + \tfrac{7}{8}$$

b) (3 Punkte) Gegeben sei ein Vektorfeld

$$\mathbf{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \ln(zy) \\ \frac{x}{y} \\ \beta\frac{x}{z} \end{pmatrix},$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$ und $y, z > 0$.
(1) Für welchen Wert von β ist $\mathbf{a}$ wirbelfrei?
(2) Überprüfen Sie die hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines Potentials $\Phi(x,y,z)$.
(3) Berechnen Sie $\Phi(x,y,z)$, so dass $\Phi(1,1,1) = 5$ gilt.

(1)

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ln(zy) \\ \frac{x}{y} \\ \beta\frac{x}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ -\left(\frac{\beta}{z}-\frac{1}{z}\right) \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{y} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

falls $\beta = 1$ gilt.

(2)

$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$ in $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y, z > 0\}$. B ist einfach zusammenhängend und deshalb existiert ein Potential $\Phi(x,y,z) \in C^1(B)$ mit $\operatorname{grad}\Phi(x,y,z) = \mathbf{a}$.

(3)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \ln(zy) \Rightarrow \ \Phi(x,y,z) = x\ln(zy) + f(y,z)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{x}{y} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} \Rightarrow \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \ f(y,z) = g(z) \Rightarrow \ \Phi(x,y,z) = x\ln(zy) + g(z)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{x}{z} + g'(z) = \frac{x}{z} \Rightarrow \ g'(z) = 0 \Rightarrow \ g(z) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow \ \Phi(x,y,z) = x\ln(zy) + c$$

Aus $\Phi(1,1,1) = 5$ ergibt sich $\Phi(x,y,z) = x\ln(zy) + 5$.

• **Aufgabe 2.**

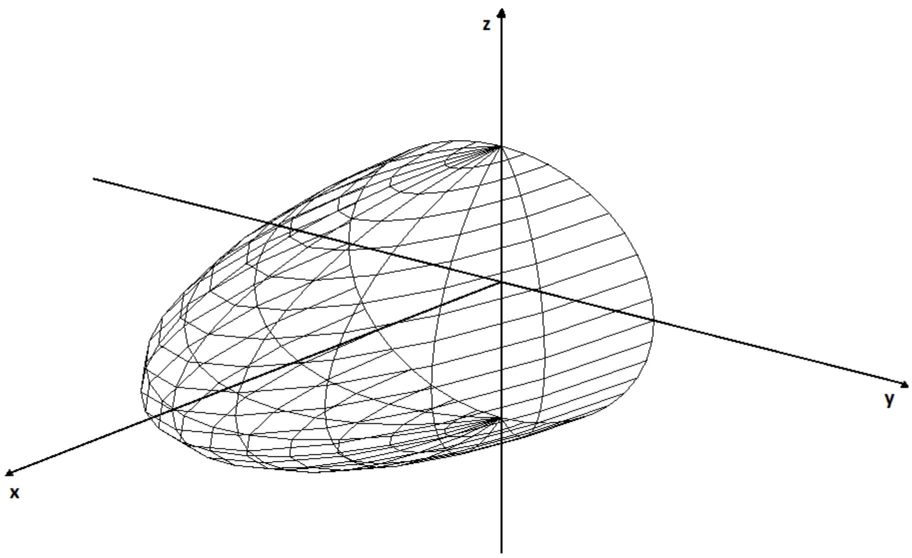
Gegeben sei eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$,

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + z^2 \le 1, \ x \ge 0\}.$$

Dabei handelt es sich um ein halbes Ellipsoid, welches durch die yz-Ebene begrenzt wird. Die Oberfläche von V, $\partial V = \partial V_M \cup \partial V_B$, besteht aus dem Mantel und dem Boden:

$$\partial V_M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1, \ x \ge 0\},$$

$$\partial V_B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{y^2}{9} + z^2 \le 1, \ x = 0\}.$$



Weiters sei ein Vektorfeld,

$$\mathbf{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) (4 Punkte) Berechnen Sie explizit den Fluss des Vekorfeldes durch die Oberfläche des Ellipsoidmantels ∂V_M,

$$\int_{\partial V_M} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_M$$

Hinweis: Beachten Sie die allgemeine Form der Ellipsoidgleichung,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

und verwenden Sie für die folgende Parametrisierung von ∂V_M:

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta\cos\varphi, \quad z = c\sin\theta\sin\varphi,$$

mit geeignet gewählten Werten für a, b und c und geeigneten Grenzen für θ und φ.

Weiters gilt: $\int \sin x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{3}\cos x + c$.

Mit Hilfe der Parametrisierung aus dem Hinweis folgt für den Ellipsoidmantel:

$$\text{Ellipsoidmantel} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos\theta \\ 3\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Als nächstes müssen wir den Flächennormalvektor bestimmen.

$$\mathbf{n}_M = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -4\sin\theta \\ 3\cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sin\theta\cos\theta \\ 4\sin^2\theta\cos\varphi \\ 12\sin^2\theta\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich das Flächenelement,

$$d\mathbf{S}_M = \mathbf{n}_M \, d(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 3\sin\theta\cos\theta \\ 4\sin^2\theta\cos\varphi \\ 12\sin^2\theta\sin\varphi \end{pmatrix} d(\theta,\varphi) \Rightarrow$$

$$\int_{\partial V_M} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 4\cos\theta \\ \sin\theta\sin\varphi \\ 3\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sin\theta\cos\theta \\ 4\sin^2\theta\cos\varphi \\ 12\sin^2\theta\sin\varphi \end{pmatrix} d\theta d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (12\sin\theta\cos^2\theta + 4\sin^3\theta\sin\varphi\cos\varphi + 36\sin^3\theta\sin\varphi\cos\varphi) d\theta d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 12\sin\theta\cos^2\theta \, d\theta d\varphi = 24\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^2\theta \, d\theta = -24\pi \cdot \frac{1}{3}\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} = 8\pi$$

b) (1.5 Punkte) Berechnen Sie den Fluss durch die gesamte Oberfläche mit Hilfe des Satzes von Gauß.

$$\int_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} \, dV$$

Als Parametrisierung von V verwenden Sie,

$$x = a \cdot r\cos\theta, \quad y = b \cdot r\sin\theta\cos\varphi, \quad z = c \cdot r\sin\theta\sin\varphi,$$

mit geeignet gewählten Grenzen für θ, φ, und r als auch die Formel

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = 12r^2\sin\theta.$$

$$\text{Ellipsoid} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4r\cos\theta \\ 3r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in [0, 2\pi], r \in [0,1] \right\}.$$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} 4\cos\theta & -4\cdot r\sin\theta & 0 \\ 3\sin\theta\cos\varphi & 3\cdot r\cos\theta\cos\varphi & -3\cdot r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det J = 12 \cdot r^2\sin\theta$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{a}\, dV = \int_V dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 12\cdot r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi = 8\pi$$

c) (0.5 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe der Resulate aus a) und b), dass der Fluss durch den Ellipsoidboden ∂V_B gleich 0 ist.

Die Integrale aus a) und b) liefern dasselbe Ergebnis, weshalb der Fluss durch den Ellipsoidboden verschwinden muss. Es gilt:

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{a}\, dV = \int_{\partial V_M} \mathbf{a}\, d\mathbf{S_M} + \int_{\partial V_B} \mathbf{a}\, d\mathbf{S_B}$$

$$8\pi = 8\pi + \int_{\partial V_B} \mathbf{a}\, d\mathbf{S_B}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial V_B} \mathbf{a}\, d\mathbf{S_B} = 0$$

- **Aufgabe 3.**

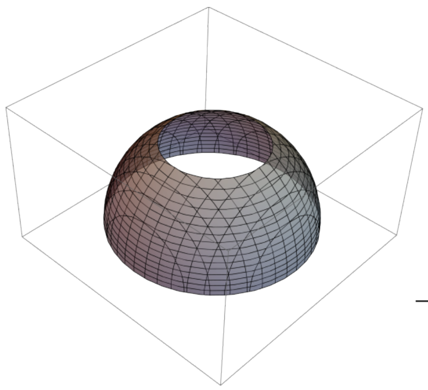
Betrachten Sie die Fläche

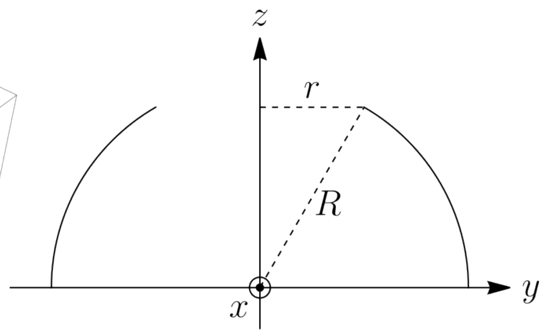
$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2,\ x^2+y^2 \geq r^2,\ z \geq 0\right\}$$

mit $r = \frac{R}{2}$ und das Vektorfeld

$$\mathbf{f}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sqrt{x^2+y^2} \cdot y \\ \sqrt{x^2+y^2} \cdot x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) (2 Punkte) Die Fläche F beschreibt den Ausschnitt einer Kugeloberfläche.





Benützen Sie die Parametrisierung der Fläche in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= R \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y &= R \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z &= R\cos(\theta) \end{aligned}$$

mit $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. Geben Sie eine Begründung für die Grenzen von θ an. Berechnen Sie den Normalvektor von F.

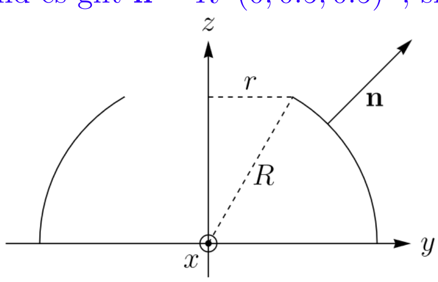
Für θ_{min} erhält man durch trigonometrische Überlegungen

$$\begin{aligned} \sin(\theta_{\text{min}}) &= \frac{r}{R} = \frac{1}{2} \\ \theta_{\text{min}} &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Der Normalvektor ergibt sich zu

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = R^2 \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = R^2 \sin(\theta) \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Sieht man sich den Normalverktor an der Stelle $\theta = \pi/4$ and $\varphi = \pi/2$ an, so zeigt der Normalvektor „nach außen“ und es gilt $\mathbf{n} = R^2\,(0, 0.5, 0.5)^T$, siehe Skizze.



b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Rotation von $\mathbf{f}$ und mit Ihrem Ergebnis für $\mathbf{n}$ das Integral

$$\int_F \nabla \times \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

und überprüfen Sie den Satz von Stokes, indem Sie

$$\int_{\partial F} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

auswerten. Achten Sie auf die korrekte Umlaufrichtung der Randkurven in Bezug auf die Orientierung des Normalvektors.

Hinweis: $\int \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^3(x) + c$

Die Rotation erhält man durch

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{x^2+y^2}\cdot y \\ \sqrt{x^2+y^2}\cdot x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\int_F \nabla \times \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3R\sqrt{\sin^2(\theta)\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right)} \end{pmatrix} \cdot R^2\sin(\theta) \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= 6\pi R^3 \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi R^3\left(\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{7\pi R^3}{4}$$

Die Fläche wird von zwei Kreisen mit Radius R (bei $z=0$) und $r = R/2$ (bei $z = \frac{\sqrt{3}}{2}R$) begrenzt. Der Normalvektor zeigt „nach außen“, deshalb muss ersterer im Gegenuhrzeigersinn und letzterer im Uhrzeigersinn durchlaufen werden.

$$z = 0 \qquad \mathbf{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos(\varphi) \\ R\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{d}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -R\sin(\varphi) \\ R\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}\varphi$$

$$\int_{\partial F_1} \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -R\cdot R\sin(\varphi) \\ R\cdot R\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R\sin(\varphi) \\ R\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}\varphi = R^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 2\pi R^3$$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2}R \qquad \mathbf{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R/2\cos(\varphi) \\ R/2\sin(\varphi) \\ \sqrt{3}/2R \end{pmatrix} \qquad \mathrm{d}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -R/2\sin(\varphi) \\ R/2\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}\varphi$$

$$\int_{\partial F_2} \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{R^3}{8}\int_{2\pi}^{0}\mathrm{d}\varphi = -\frac{R^3\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow \int_{\partial F} \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 2\pi R^3 - \frac{R^3\pi}{4} = \frac{7\pi R^3}{4}$$