Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
SS 2023

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

2. Haupttest (FR, 16.06.2023) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	2.	3.	gesamt
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die auf den abgegebenen Blättern eingetragenen Antworten.

Vergessen Sie nicht, am Ende des schriftlichen Tests Ihre Ausarbeitungen sowie Ihren Ausweis mit Ihrem Smartphone/Tablett zu digitalisieren und in TUWEL hochzuladen.

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei der Differenzialoperator L mit

$$Lu(x) = u''(x) + 4u'(x).$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie zuerst die allgemeine Form der Fundamentallösung U zu L.
Genauer: Geben Sie das Gleichungssystem für die Koeffizienten von U an, sodass U die Standard-Stetigkeitskriterien erfüllt.

Die Fundamentallösung soll $LU(x) = \delta(x)$ erfüllen, daher ist $LU(x) = 0$ für alle $x \neq 0$.

$$LU(x) = U''(x) + 4U'(x) = 0, \ \forall x \neq 0$$

Wir machen den Ansatz $U(x) = Ae^{\lambda x}$.

$$LU(x) = (\lambda^2 + 4\lambda)Ae^{\lambda x} = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 0, \, \lambda_2 = -4. \ D.h.,$$

$$U(x) = \begin{cases} A_1 e^{-4x} + B_1 & x > 0, \\ A_2 e^{-4x} + B_2 & x < 0. \end{cases}$$

U soll nun einige Bedingungen erfüllen.

- $U(x)$ soll stetig in 0 sein, siehe die Sprungbedingung für U'.
  $U(0+) = U(0-) \rightarrow A_1 + B_1 = A_2 + B_2$.
- $LU(x)$ verhält sich wie $\delta(x)$ und wir können die Normierung der Deltafunktion nutzen.
  $LU(x) = \delta(x) \Rightarrow \int_{-\epsilon}^{\epsilon} LU(x)dx = 1$.

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} U''(x) + 4U'(x)dx = U'(x)\Big|_{-\epsilon}^{\epsilon} + 4U(x)\Big|_{-\epsilon}^{\epsilon} = 1$$

Im Limes $\lim\limits_{\epsilon \to 0}$ erhalten wir aufgrund der Stetigkeit von U

$$U'(0+) - U'(0-) = 1 \ \rightarrow \ -4A_1 = -4A_2 + 1.$$

b) (3 Punkte) Passen Sie die Lösung aus (a) so an, dass zwei weitere Eigenschaften erfüllt sind:

$$\lim_{x\to+\infty} U(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} U(x) < \infty.$$

Die Lösung U wird damit eindeutig. Lösen Sie dann die inhomogene Differentialgleichung:

$$Lu(x) = -12xe^{-x}.$$

Hinweis: $\int_a^b xe^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\Big|_a^b$

Damit U im Unendlichen verschwindet muss $B_1 = 0$ gelten. Damit U im Unendlichen beschränkt bleibt muss $A_2 = 0$ gelten. Das Gleichungssystem aus a) wird damit zu

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= B_2 \\ -4A_1 &= 1 \end{aligned}\right\} A_1 = -\frac{1}{4}, B_2 = -\frac{1}{4}.$$

und damit

$$U(x) = \begin{cases} U_+(x) := -\frac{1}{4}e^{-4x}, & x > 0, \\ U_-(x) := -\frac{1}{4}, & x < 0. \end{cases}$$

Eine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung erhalten wir durch

$$u(x) = (U * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi)\,(-12)\xi e^{-\xi} d\xi.$$

Wir haben die Bereiche von $U(x)$ nach dem Vorzeichen des Arguments aufgeteilt. Das Argument ist nun $(x - \xi)$ weshalb sich die Bereiche zu

$$\begin{array}{ll} x - \xi < 0 \text{ für } \xi > x & U_-(x-\xi) \\ x - \xi > 0 \text{ für } \xi < x & U_+(x-\xi) \end{array}$$

ergeben. Wir teilen also das Integral an der Stelle x auf,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} U_+(x-\xi)\, f(\xi) d\xi + \int_x^{\infty} U_-(x-\xi) f(\xi) d\xi$$

und erhalten

$$\begin{aligned} u(x) &= 3\int_{-\infty}^{x} e^{-4x+4\xi}\xi e^{-\xi} d\xi + 3\int_x^{\infty} \xi e^{-\xi} d\xi = 3e^{-4x}\int_{-\infty}^{x} \xi e^{3\xi} d\xi + 3\int_x^{\infty} \xi e^{-\xi} d\xi \\ &= 3e^{-4x}\left[\frac{1}{3}\xi e^{3\xi}\Big|_{-\infty}^{x} - \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{x} e^{3\xi} d\xi\right] + 3\left[-\xi e^{-\xi}\Big|_x^{\infty} + \int_x^{\infty} e^{-\xi} d\xi\right] \\ &= 3e^{-4x}\left[\frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}\right] + 3\Big[xe^{-x} + e^{-x}\Big] \\ &= 4xe^{-x} + \frac{8}{3}e^{-x} \end{aligned}$$

wobei wir partiell integriert haben.

c) (1 Punkt) Wie sieht die Sprungbedingung aus, wenn L die folgende Form hat: $Lu = 2u'' + 8u'$?

Hinweis: *Integrieren Sie* $LU = \delta$ *auf dem Intervall* $[-\epsilon, \epsilon]$ *und lassen Sie* ϵ *gegen Null gehen.*

$LU(x)$ verhält sich wie $\delta(x)$ und wir können die Normierung der Deltafunktion nutzen.
$LU(x) = \delta(x) \Rightarrow \int_{-\epsilon}^{\epsilon} LU(x)dx = 1$.

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} 2U''(x) + 8U'(x)dx = 2U'(x)\Big|_{-\epsilon}^{\epsilon} + 8U(x)\Big|_{-\epsilon}^{\epsilon} = 1$$

Im Limes $\lim\limits_{\epsilon \to 0}$ erhalten wir aufgrund der Stetigkeit von U

$$2(U'(0+) - U'(0-)) = 1 \;\rightarrow\; U'(0+) - U'(0-) = \frac{1}{2}.$$

• **Aufgabe 2.**
Gegeben sei das Integral

$$I[y] = \int_0^1 \left[\left(y'(x)\right)^2 e^x + y(x)\, y'(x) \right] dx$$

und die Nebenbedingung

$$\varphi[y] = \int_0^1 y(x)\, dx - 3 + \frac{1}{e}\left(1 + e^2\right) = 0.$$

Die Randbedingungen lauten

$$y(0) = y(1) = 0.$$

a) (2 Punkte) Stellen Sie die Euler-Lagrange Gleichung für jene Funktion y auf, die das Integral $I[y]$ unter der Nebenbedingung $\varphi[y] = 0$ minimiert.

Wir stellen die Euler-Lagrange-Gleichung für die Lagrange-Funktion $h = (y')^2 e^x + yy' + \lambda y$ auf

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) = \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Die linke Seite ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2e^x y' + y\right) = 2e^x\left(y' + y''\right) + y',$$

und die reche Seite lautet

$$\frac{\partial h}{\partial y} = y' + \lambda.$$

Wir vergleichen die beiden Seiten und erhalten die ihnomogene lineare Differentialgleichung,

$$2e^x\left(y' + y''\right) + y' = y' + \lambda x$$
$$y' + y'' = \frac{\lambda}{2} \cdot e^{-x}.$$

b) (3 Punkte) Lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichung im Punkt (a). Für die Lösung der homogenen Gleichung machen Sie den Exponentialansatz $y_h(x) = A\,e^{\alpha x}$. Für die Lösung der inhomogenen Gleichung machen Sie den Ansatz $y_p(x) = Cx\,e^{-x}$ und berechnen Sie die Konstante C.

Die homogene Differentialgleichung lautet:

$$y_h'' + y_h' = 0$$

Wir verwenden den Ansatz

$$y_h(x) = A\,e^{\alpha x},$$

und erhalten

$$\begin{aligned} A\left(\alpha^2 + \alpha\right) e^{\alpha x} = 0 \ \Rightarrow \\ \alpha(\alpha+1) = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = -1. \end{aligned}$$

Die nichttriviale Lösung der homogenen Gleichung lautet also

$$y_h(x) = A\,e^{-x} + B.$$

Wir betrachten jetzt die inhomogene Differentialgleichung,

$$y_p'' + y_p' = \frac{\lambda}{2} \cdot e^{-x}.$$

Mit dem Ansatz $y_p(x) = Cx \cdot e^{-x}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= Ce^{-x} - Cxe^{-x} \ \Rightarrow \\ y_p''(x) &= -2Ce^{-x} + Cxe^{-x} \ \Rightarrow \\ y_p''(x) + y_p'(x) = -Ce^{-x} &= \frac{\lambda}{2} e^{-x} \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ C &= -\frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des Problems ist die Summe von $y_h(x)$ und $y_p(x)$,

$$y(x) = Ae^{-x} + B - \frac{\lambda}{2} x e^{-x}.$$

c) (1 Punkt) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten A, B, und λ auf. Zeigen Sie, dass die Werte $A = -1,\ B = 1,\ \lambda = 2(e-1)$ dieses Gleichungssystem lösen.

Hinweis: *Verwenden Sie die Formel* $\int_a^b xe^{-x}dx = -e^{-x}(x+1)\,|_a^b$.

Die Rand- und Nebenbedingungen lauten

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$
$$\int_0^1 y(x)\,dx = 3 - \frac{1}{e}\left(1 + e^2\right) \ .$$

Wir setzen die Lösung aus dem Punkt b) in das Gleichungssystem ein und erhalten aus den Randbedingungen,

$$A + B = 0, \quad \frac{1}{e}\left(A - \frac{\lambda}{2}\right) + B = 0. \tag{1}$$

Wir berechnen jetzt das Integral aus der Nebenbedingung aus,

$$\int_0^1 \left[\left(A - \frac{\lambda}{2}x\right)e^{-x} + B\right]dx =$$
$$\left[-Ae^{-x} - \frac{\lambda}{2}\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) + Bx\right]_0^1 =$$
$$-Ae^{-1} + \lambda e^{-1} + B + A - \frac{\lambda}{2} =$$
$$A\left(1 - e^{-1}\right) + \frac{\lambda}{2}\left(2e^{-1} - 1\right) + B.$$

Zu den zwei Bedingungen aus (**??**) kommt noch die dritte Bedingung dazu,

$$A\left(1 - e^{-1}\right) + \frac{\lambda}{2}\left(2e^{-1} - 1\right) + B = 3 - \frac{1}{e}\left(1 + e^2\right). \tag{2}$$

Zum Schluss überprüfen wir durch einsetzen, ob $A = -1,\ B = 1,\ \lambda = 2(e-1)$ die Lösung des Gleichungssystems, (**??**) – (**??**), ist. Wir erhalten

$$-1 + 1 = 0 \qquad \checkmark$$
$$\frac{1}{e}\left(-1 - (e-1)\right) + 1 = -1 + 1 = 0 \qquad \checkmark$$
$$-\left(1 - e^{-1}\right) + (e-1)\left(2e^{-1} - 1\right) + 1 = -1 + e^{-1} + 2 - 2e^{-1} - e + 1 + 1 = 3 - \frac{1}{e}\left(1 + e^2\right) \qquad \checkmark$$

- **Aufgabe 3.**

a) (1.5 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Fouriertransformierte einer Funktion $f(x)$ bei einer gegebenen Konstante $a > 0$ die folgende Beziehung gilt:

$$\widehat{f(ax)}(k) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{k}{a}\right)$$

Hinweis: *Führen Sie eine Variablensubstitution durch.*

$$\widehat{f(ax)}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-ikx}\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} y = xa \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}y \end{matrix}\right| = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\frac{k}{a}y}\frac{1}{a}\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\frac{k}{a}y}\mathrm{d}y = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{k}{a}\right)$$

$\square$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie nun die Fouriertransformierte der Funktion $g(x)$ unter Verwendung der Linearität der Fouriertransformation, sowie der im Unterpunkt (a) gegebenen Regel.

$$g(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2} + e^{-4x^2}$$

Hinweis: *Verwenden Sie die folgende Formel zur Berechnung der Fouriertransformierten:*

$$\widehat{e^{-x^2}}(k) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}$$

$$e^{-4x^2} = e^{-(2x)^2}$$

$\Rightarrow$ Unter Verwendung der Beziehung $\widehat{f(ax)}(k) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{k}{a}\right)$ erhalten wir:

$$\widehat{e^{-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{16}}$$

$\Rightarrow$ Unter Verwendung der Linearität der Fourier-Transformierten erhalten wir:

$$\widehat{g(x)}(k) = \frac{1}{2}\widehat{e^{-x^2}}(k) + \widehat{e^{-4x^2}}(k) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{16}}$$

c) (2.5 Punkte) Leiten Sie die im Hinweis zu Unterpunkt (b) gegebene Beziehung $\widehat{e^{-x^2}}(k) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}$ her, indem Sie die Fouriertransformierte $\hat{f}(k)$ der Funktion:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

explizit berechnen, wobei $\hat{f}(k) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} \mathrm{d}x$ gilt.

Zur Berechnung der Fouriertransformierten gehen Sie wie folgt vor:

1) Schreiben Sie das Integral zur Berechnung von $\frac{d}{dk}\hat{f}(k)$ auf, integrieren Sie einmal partiell und zeigen Sie, dass folgende Beziehung gilt:

$$\frac{d}{dk}\hat{f}(k) = -\frac{k}{2}\hat{f}(k).$$

2) Lösen Sie die obige Differentialgleichung mit folgender Anfangsbedingung:

$$\hat{f}(0) = \sqrt{\pi}.$$

Hinweis: $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$

Fourier-Transformierte der gegebenen Funktion lautet:

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} \mathrm{d}x$$

Berechnen wir nun die erste Ableitung dieser Fouriertransformierten:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \hat{f}'(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} -i \underbrace{xe^{-x^2}}_{=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-x^2}} e^{-ikx}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} i \left(\frac{d}{dx}e^{-x^2}\right) e^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} i e^{-x^2} e^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \frac{1}{2} i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx}(-ik)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{k}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx}\mathrm{d}x = -\frac{k}{2}\hat{f}(k)
\end{aligned}$$

Nun müssen wir die folgende Differentialgleichung lösen:

$$\frac{\hat{f}'(k)}{\hat{f}(k)} = -\frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow \ \ln(\hat{f}(k)) = -\frac{k^2}{4} + c_0$$

$$\Rightarrow \ \hat{f}(k) = ce^{-\frac{k^2}{4}}$$

Zur Bestimmung von der Konstante c verwenden wir die im Hinweis gegebene Beziehung:

$$\hat{f}(0) = c = \sqrt{\pi} \ \Rightarrow \ \hat{f}(k) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}$$