

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

2. Haupttest (MO, 18.01.2016) / Gruppe 1 (*mit Lösung*)

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

• **Aufgabe 1.** Seien $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ und $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ Basen von \mathbb{R}^4 bzw. \mathbb{R}^3 , welche durch die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definiert sind.

Sei die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch die Bilder der Basisvektoren der Basis B definiert

$$\phi(b_1) = -c_1 + 2c_3 \quad \phi(b_2) = c_2 \quad \phi(b_3) = -c_1 \quad \phi(b_4) = c_1 + c_2 + c_3.$$

- a) (1 Punkt) Die lineare Abbildung ϕ kann bezüglich der beiden Basen B und C mit Hilfe der Matrix $[\phi(B)]_C := A$ dargestellt werden. Geben Sie diese Matrix an.

Wie direkt aus der Definition ersichtlich, lautet die gesuchte Matrix

$$[\phi(B)]_C = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) (3 Punkte) Nun seien zwei weitere Basen $\tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4\}$ und $\tilde{C} = \{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3\}$, mit den Basisvektoren

$$\tilde{b}_1 = b_1 \quad \tilde{b}_2 = b_2 + b_1 \quad \tilde{b}_3 = b_3 + b_2 + b_1 \quad \tilde{b}_4 = b_4 + b_3 + b_2 + b_1$$

und

$$\tilde{c}_1 = c_1 \quad \tilde{c}_2 = c_2 + c_1 \quad \tilde{c}_3 = c_3 + c_2 + c_1$$

definiert. Geben Sie die Matrixdarstellung der Abbildung ϕ bezüglich der Basen \tilde{B} und \tilde{C} , $[\phi(\tilde{B})]_{\tilde{C}} := \tilde{A}$, an.

Unter Verwendung von Satz 3.9 aus dem Vorlesungsskriptum gilt

$$\tilde{A} = [\phi(\tilde{B})]_{\tilde{C}} = T_{\tilde{C} \leftarrow C} [\phi(B)]_C T_{\tilde{B} \leftarrow B}^{-1} = T_{\tilde{C} \leftarrow C} [\phi(B)]_C T_{B \leftarrow \tilde{B}} = T_{\tilde{C} \leftarrow C} A T_{B \leftarrow \tilde{B}}.$$

Es müssen also die beiden Transformationsmatrizen $T_{\tilde{C} \leftarrow C}$ und $T_{B \leftarrow \tilde{B}}$ bestimmt werden. Die einzelnen Spaltenvektoren $s^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, der Transformationsmatrix $T_{B \leftarrow \tilde{B}}$ können simultan durch Lösen der Gleichungssysteme

$$(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4)(s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}, s^{(4)})$$

bestimmt werden.

Gleiches Vorgehen wird für die Transformationsmatrix $T_{\tilde{C} \leftarrow C}$ verwendet. Nach dem Lösen der Gleichungssysteme ergeben sich die Transformationsmatrizen

$$T_{\tilde{C} \leftarrow C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{B \leftarrow \tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit deren Hilfe man die Darstellung der Abbildung ϕ bzgl. der Basen \tilde{B} und \tilde{C} findet,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -0 & -1 & -3 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung mit den Basen \tilde{B} und \tilde{C} wie oben, mit Ausnahme von $\tilde{b}_3 = b_1 + b_2 + b_3$ bzw. $\tilde{c}_3 = c_1 + c_2 + c_3$ wird ebenfalls akzeptiert.

Dabei ergeben sich die Transformationsmatrizen und die Matrix \tilde{A} zu

$$T_{\tilde{C} \leftarrow C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_{B \leftarrow \tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich den kanonischen Basen E_3 und E_4 , $[\phi(E_4)]_{E_3}$. Sie können dabei die Matrix A (oder \tilde{A}) verwenden oder direkt vorgehen.

Hinweis: Das direkte Vorgehen spart Zeit.

Die Matrix $[\phi(E_4)]_{E_3}$ der Abbildung ϕ bezüglich der Basen E_3 und E_4 kann mit Hilfe des Zusammenhangs

$$[\phi(E_4)]_{E_3} = T_{E_3 \leftarrow C} A T_{B \leftarrow E_4}$$

berechnet werden und es folgt,

$$T_{E_3 \leftarrow C} = (c_1, c_2, c_3) \quad \text{und} \quad T_{B \leftarrow E_4} = T_{E_4 \leftarrow B}^{-1} = (b_1, b_2, b_3, b_4)^{-1}.$$

Statt die Inverse von $T_{E_4 \leftarrow B}$ zu berechnen, kann man auch die entsprechenden linearen Gleichungssysteme für die Spalten $s^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, von $T_{B \leftarrow E_4}$

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4)(s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}, s^{(4)})$$

Damit ergibt sich die Matrix $[\phi(E_4)]_{E_3}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [\phi(E_4)]_{E_3}.$$

Ähnlich lässt sich die Matrix $[\phi(E_4)]_{E_3}$ mit Hilfe der Matrix \tilde{A} bestimmen,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0 & -1 & -3 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [\phi(E_4)]_{E_3}.$$

Mit der alternativen Lösung aus Aufgabenteil b, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [\phi(E_4)]_{E_3}.$$

Alternative Lösung:

Aus der Definition der Abbildung und wegen $(b_1, b_2, b_3, b_4) =$

$(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ sowie $(c_1, c_2, c_3) = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ folgt,

$$\phi(b_1) = \phi(e_1) = -e_1 + 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 = 1e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

$$\phi(b_2) = \phi(e_1 + e_2) = \phi(e_1) + \phi(e_2) = e_1 + e_2 \Rightarrow \phi(e_2) = -1e_2 - 2e_3$$

$$\phi(b_3) = \phi(e_1) + \phi(e_2) + \phi(e_3) = -e_1 \Rightarrow \phi(e_3) = -2e_1 - e_2$$

$$\phi(b_4) = \phi(e_1) + \phi(e_2) + \phi(e_3) + \phi(e_4) = 3e_1 + 2e_2 + e_3 \Rightarrow \phi(e_4) = 4e_1 + 2e_2 + e_3$$

Aus diesen 4 Beziehungen, lässt sich dann analog zum Unterpunkt a.) die Matrix $[\phi(E_4)]_{E_3}$ bestimmen.

- **Aufgabe 2.** Betrachten Sie den euklidischen Vektorraum $V = (C[0, 1], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, wobei das Skalarprodukt und die Norm wie folgt definiert sind:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

- a) (3 Punkte) Betrachten Sie einen Unterraum U von V mit der Basis $B = \{b_1, b_2\} = \{1, x^2\}$. Orthonormieren Sie diese Basis bezüglich des obigen Skalarproduktes mit Hilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt.

Wir gehen nach Schema des Gram-Schmidt-Verfahrens vor ($\tilde{w}_{1,2}$ seien die jeweils noch nicht normierten Vektoren und $w_{1,2}$ die normierten):

$$\tilde{w}_1(x) = 1, \quad \langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_1 \rangle = \int_0^1 1 dx = x \Big|_0^1 = 1 \quad \Rightarrow \quad w_1(x) = 1.$$

$$\tilde{w}_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{1} \cdot 1 = x^2 - \int_0^1 x^2 dx = x^2 - \left(\frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1\right) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{w}_2, \tilde{w}_2 \rangle &= \int_0^1 \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) dx = \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{45} \\ \Rightarrow w_2(x) &= \frac{3}{2}\sqrt{5}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

- b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion u von $v(x) = e^{-x} \in V$ auf den Unterraum U .

Berechnung der Fourier-Koeffizienten:

$$\langle v, w_1 \rangle = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e},$$

$$\langle v, w_2 \rangle = \int_0^1 e^{-x} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = \frac{3}{2}\sqrt{5} \left(\frac{5}{3} - \frac{14}{3e}\right)$$

$$\text{mit } \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 2 \int_0^1 x e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 2 \left(-x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx\right) = 2 - \frac{5}{e}.$$

Damit erhalten wir:

$$u(x) = \frac{45}{4} \left(\frac{5}{3} - \frac{14}{3e}\right) \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + 1 - \frac{1}{e}.$$

• **Aufgabe 3.** Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Jordansche Normalform J und die dazugehörige Transformationsmatrix X . a): 5 P.

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda - 3)((1 - \lambda)^2 - 16) = (5 - \lambda)(\lambda + 3)^2 = 0 \rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = -3, \quad n_1 = 2, \quad 1 \leq g_1 \leq 2$$

$$\lambda_3 = 5, \quad n_3 = 1 = g_3,$$

$$(A - \lambda_1 I) \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \neq 0. \text{ Für } s = 1 \text{ folgt}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A - \lambda_3 I) \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_3 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \neq 0. \text{ Für } s = 1 \text{ folgt}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\text{Rang}(A - \lambda_1 I) = 2$ gilt, gibt es nur einen Eigenvektor, d.h. es gibt einen Hauptvektor:

$$(A - \lambda_1 I) \mathbf{h}_1 = \mathbf{v}_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Für } t = 0$$

$$\text{folgt } \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\rightarrow J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = (\mathbf{v}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{4} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$AX = XJ$ ist erfüllt ✓

b) Ist A invertierbar? (Begründung reicht aus.)

b): 1 P.

A ist invertierbar, da 0 kein Eigenwert von A ist.