

1. (UE-Skriptum 3.2) Gegeben seien die folgenden Abbildungen.

$$\varphi: P_n \rightarrow P_{n-1}, \varphi(p) = p'(x), \quad \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \psi(\mathbf{x}) = x_1 x_2$$

$$\text{und } \xi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \xi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Überprüfen Sie die Abbildungen  $\varphi, \psi, \xi$  jeweils auf Linearität.  
 (b) Falls die Abbildungen jeweils linear sind, bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis des  $\mathbb{R}^n$  bzw. der Monombasis  $\{1, x, \dots, x^n\}$  von  $P_n$ .  
 (c) Bestimmen Sie jeweils das Bild und den Kern aller linearen Abbildungen.
2. (UE-Skriptum 3.6) Betrachten Sie den Vektorraum  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und die Matrix  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in V$ . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \varphi(A) = AM - MA$$

linear ist und bestimmen Sie eine Basis des Kerns sowie des Bildes von  $\varphi$ . Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  bezüglich der kanonischen Basis von  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

3. (UE-Skriptum 3.7) Gegeben seien die linearen Abbildungen  $\varphi, \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie für die folgenden linearen Abbildungen die Abbildungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis an.

$$5\varphi + 3\psi, \quad \varphi \circ \psi, \quad \psi \circ \varphi, \quad \varphi^2, \quad \psi^2, \quad \psi^{-1}$$

4. (UE-Skriptum 3.8) Gesucht sei eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , sodass gilt

$$\text{Bild}(\varphi) = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{Kern}(\varphi) = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Geben Sie die Abbildungsmatrix  $\varphi$  bezüglich der kanonischen Basis an. Ist die Abbildung  $\varphi$  durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt?

5. (UE-Skriptum 3.9) Gegeben sei eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$\varphi(\mathbf{x}) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 + x_3, x_2 + 2x_3)^T.$$

(a) Zeigen Sie, dass  $\varphi$  bijektiv ist.

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von  $\varphi^{-1}$  bezüglich der kanonischen Basis.

(c) Gegeben sei  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)^T$ . Bestimmen Sie  $\varphi^{-1}(\mathbf{v})$ .

6. (UE-Skriptum 3.13) Betrachten Sie den Vektorraum  $V = P_3$  aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3. Gegeben sei die Abbildung  $\varphi$  durch  $\varphi(p) = p'$ , wobei mit  $p'$  die Ableitung des Polynoms zu verstehen ist. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix  $[\varphi(B)]_B$  für die Basis

$$B = \{x^2, 2x^2 - 1, x^2 - x, x^3 + 2x^2 + x + 2\}.$$