Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

WS 2008/09

ANALYSIS I FÜR TPH

Haupttest (19. Dezember 2008)

Gruppe gelb *(mit Lösung)*

Aufgabe 1.

Eine Folge $\{c_n\}$ sei rekursiv definiert durch

$$c_{n+1} = \tfrac{1}{3}c_n + 2$$

mit festem Startwert $c_0 \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für Startwerte $c_0 < 3$ gilt: $c_n < 3 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für Startwerte $c_0 < 3$ die Folge streng monoton wachsend ist.

c) Ist die Folge für alle Startwerte $c_0 < 3$ konvergent? (Begründung!)

Anmerkung: Sie können c) beantworten, ohne a), b) gelöst zu haben; man setze einfach die Aussagen a), b) als richtig voraus.

d) Dafür gibt es 2 Extra-Punkte:

Geben Sie den Grenzwert dieser konvergenten Folge an. (Präzise Begründung ist verlangt!)

LÖSUNG

a) <u>Induktionsanfang</u>: $n = 0$: $c_0 < 3$ laut Voraussetzung.

<u>Induktionsschritt</u>: $n \to n+1$: Zu zeigen ist $c_{n+1} < 3$. Es gilt

$$c_{n+1} = \tfrac{1}{3}c_n + 2 < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{3}c_n < 1 \quad \Leftrightarrow \quad c_n < 3,$$

was laut Induktionsvoraussetzung gilt. Somit ist $c_{n+1} < 3$.

b) <u>Induktionsanfang</u>: $n = 1$: $c_1 = \tfrac{1}{3}c_0 + 2 > c_0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 > \tfrac{2}{3}\,c_0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 > c_0$, was laut Voraussetzung gilt.

<u>Induktionsschritt</u>: $n \to n+1$: Zu zeigen ist $c_{n+1} > c_n$. Es gilt nach Definition

$$c_{n+1} > c_n \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{3}c_n + 2 > \tfrac{1}{3}c_{n-1} + 2 \quad \Leftrightarrow \quad c_n > c_{n-1},$$

was laut Induktionsvoraussetzung gilt. Somit ist $c_{n+1} > c_n$, die Folge wächst also streng monoton.

c) Nach a) und b) ist die Folge c_n ist für Startwerte $c_0 < 3$ nach oben beschränkt und monoton wachsend, daher konvergent.

d) Für den Grenzwert c muss offenbar gelten $c = \tfrac{1}{3}\,c + 2$, also $c = 3$. Wie begründet man das präzise? Es muss gelten $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (\tfrac{1}{3}c_n + 2) = \lim\limits_{n\to\infty} \tfrac{1}{3}c_n \; + \; 2 = \tfrac{1}{3}\,c - 1 \;\; \Rightarrow \;\; c = 3.$

Oder so: Für die Folge $c_n - 3$ gilt

$$c_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}\,c_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}\,c_n - 1 = \frac{1}{3}\,(c_n - 3).$$

$c_n - 3$ ist daher eine Nullfolge, und somit gilt $c_n \to 3$.

Aufgabe 2.

Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3x)^{2n+1} .$$

a) Untersuchen Sie die Reihe auf absolute Konvergenz für $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Hinweis: Geeignet umformen.

b) Geben Sie für jedes x im Konvergenzbereich den Grenzwert der Reihe an.

c) Für welche $x > 0$ ist die Reihe konvergent?

Anmerkung: Absolute Konvergenz ist hier nicht die Frage. c) kann unabhängig von a), b) beantwortet werden.

LÖSUNG

a) Man kann die Reihe umschreiben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3x)^{2n+1} = 3x \sum_{n=0}^{\infty} (-9x^2)^n.$$

Es liegt also eine absolut konvergente geometrische Reihe vor. Diese konvergiert genau für $|-9x^2| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Falls man nicht erkennt, dass es sich (bis auf den Faktor $3x$) um eine geometrische Reihe handelt, folgt die absolute Konvergenz auch leicht mittels des Quotientenkriteriums.

b) Konvergiert die Reihe, so lautet ihr Grenzwert nach der geometrischen Summenformel

$$3x \sum_{n=0}^{\infty} (-9x^2)^n = 3x \, \frac{1}{1-(-9x^2)} = \frac{3x}{1+9x^2}.$$

c) Für $x > 0$ liegt eine alternierende Reihe vor, die für $0 < x < \frac{1}{3}$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Für $x = \frac{1}{3}$ oszillieren die Reihenglieder zwischen den beiden Häufungspunkten $+1$ und -1 hin und her, die Reihe ist daher nicht konvergent. Für $x > \frac{1}{3}$ bilden die Reihengleider keine Nullfolge, daher liegt ebenfalls keine Konvergenz vor.

Aufgabe 3.

Eine kleine Kurvendiskussion: Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{3x}{1+9x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie $|f(x)| \le 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Verwenden Sie zwei separate Abschätzungen für x in der Nähe von 0 und x weiter weg von 0, und wählen Sie die beiden Bereiche so, dass sich ingesamt eine möglichst kleine Schranke ergibt.

b) Wir betrachten jetzt nur den Bereich $x \ge 0$, mit $f(x) \ge 0$ (für $x < 0$ alles analog, weil f eine ungerade Funktion ist).

(i) Sei $y \ge 0$ beliebig. Geben Sie alle möglichen x an mit $f(x) = y$. (Fallunterscheidung!)

(ii) Wie lautet das größte y, für das ein derartiges x existiert? Geben Sie den Wert von

$$\sup_{x \in [0,\infty)} f(x)$$

an. Gibt es ein $x_{\max} \ge 0$ mit $x_{\max} = \sup_{x \in [0,\infty)} f(x)$? Falls ja – wie lautet $x_{\max}$?

c) Dafür gibt es 2 Extra-Punkte:

Geben Sie $a \in \mathbb{R}$ an, so dass

$$\lim_{x \to +\infty} |\, x^2 \,(f(x) - a\,x^{-1})\,| = 0.$$

LÖSUNG

a) Sei $a > 0$. Für $|x| \le a$ ist $|f(x)| \le 3a$; für $|x| \ge a$ ist $|f(x)| < 3x/(9x^2) \le 1/(3a)$. Die günstigste Wahl für a ist offenbar gegeben durch $3a = 1/(3a)$, also $a = \frac{1}{3}$. Also gilt $|f(x)| \le 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) (i) Für $y = 0$ ist $x = 0$. Für $y > 0$ führt $f(x) = 3x/(1+9x^2) = y$ auf die quadratische Gleichung

$$9y\,x^2 - 3x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{6y}\,.$$

Für $y < \frac{1}{2}$ gibt es zwei Lösungen x, für $y = \frac{1}{2}$ die 'doppelte' Lösung $x = \frac{1}{3}$. Für $y > \frac{1}{2}$ existiert keine reelle Lösung.

(ii) Daher ist $y = \frac{1}{2}$ der maximal mögliche Wert für $f(x)$, und er wird an der Stelle $x_{\max} = \frac{1}{3}$ angenommen:

$$\sup_{x \in [0,\infty)} f(x) = f(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2}.$$

c) Betrachte Limes für $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned} x^2\Big(\frac{3x}{1+9x^2} - \frac{a}{x}\Big) &= x^2\,\frac{3\,x^2 - a\,(1+9x^2)}{x(1+9x^2)} \\ &= \frac{(3-9a)x^4}{x(1+9x^2)} - a\,\frac{x^2}{x(1+9x^2)} \to 0 \quad \text{für} \quad a = \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$