Wir betrachten die rekursiv definierte Folge

$$a_0 := q, \quad a_n := p\, a_{n-1} + q\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

mit $p \geq 0$ und $q \in \mathbb{R}$. Interpretation: Zunahme bzw. Abnahme einer Population a_n um einen Faktor p von Zeitpunkt zu Zeitpunkt, korrigiert um q (Zuwanderung oder Abwanderung) in jedem Schritt.

a) Leiten Sie eine explizite Formel für die a_n her.

b) Berechnen Sie den 'asymptotischen Zustand' $a_\infty := \lim_{n\to\infty} a_n$

– unter Verwendung der Lösungsdarstellung aus a),

– unter direkter Verwendung der rekursiven Definition der a_n,

für diejenigen Werte von p, für die der Limes a_∞ existiert.

---

a) Zunächst rechnen:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \cdot q \\ a_1 &= p\, a_0 + q = p\, q + q = q\,(1+p) \\ a_2 &= p\, a_1 + q = p\,(p\, q + q) + q = q\,(1 + p + p^2) \end{aligned}$$

usw. Offenbar gilt (geometrische Reihe):

$$a_n = q \sum_{k=0}^{n} p^k = q\, \frac{1-p^{n+1}}{1-p}$$

Beweis mittels vollständiger Induktion. Induktionsschluss $n \mapsto n+1$ analog wie für geometrische Summe (VO):

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= p\, a_n + q \overset{ind}{=} p\, q\, \frac{1-p^{n+1}}{1-p} + q \\ &= q\, \frac{p(1-p^{n+1}) + 1 - p}{1-p} = q\, \frac{1-p^{n+2}}{1-p} \qquad \checkmark \end{aligned}$$

(Analog, aber etwas allgemeiner für anderen Anfangswert $a_0 \neq q$.)

b) – Für $p \in [0,1)$ existiert der Limes

$$a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{q}{1-p}$$

– a_∞ ist auch *Fixpunkt* der Rekursion:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (p\, a_{n-1} + q) = p \lim_{n\to\infty} a_{n-1} + q = p \lim_{n\to\infty} a_n + q$$

$$\Rightarrow \qquad a_\infty = p\, a_\infty + q \quad \Rightarrow \quad a_\infty \text{ wie oben} \quad \checkmark$$

□

Fortsetzung von Aufgabe 1: Sei nun p so vorausgesetzt, dass in 1b) Konvergenz vorliegt. Wir betrachten die allgemeinere Rekursion

$$a_0 := q_0, \quad a_n := p\, a_{n-1} + q_n\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

mit einer gegebenen Folge $\{q_n\}$.

a) Geben Sie eine explizite Formel für die a_n an (Darstellung als Summe).

b) Sei $q_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (Zuwanderung). Wir fragen: Bleibt die Population a_n beschränkt für $n \to \infty$? Geben Sie eine Bedingung an die Folge $\{q_n\}$ an, die dafür hinreichend ist, und geben Sie für diesen Fall eine Schranke A an, so dass $a_n \leq A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) (*) Die Frage der Konvergenz der Folge $\{a_n\}$ lässt sich hier nicht allgemein beantworten, da dies vom genauen Verhalten der q_n abhängt. Betrachten Sie den Fall $q_n = 2^{-n}$ (exponentiell abnehmende Zuwanderung). Zeigen Sie: Die Population a_n stirbt aus für $n \to \infty$. ($p = \frac{1}{2}$ ist ein Sonderfall.)

---

a) Zunächst rechnen:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \cdot q_0 \\ a_1 &= p\, a_0 + q_1 = p\, q_0 + q_1 \\ a_2 &= p\, a_1 + q_2 = p\,(p\, q_0 + q_1) + q_2 = p^2\, q_0 + p\, q_1 + q_2 \end{aligned}$$

usw. Offenbar gilt:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} p^{n-k}\, q_k$$

Beweis mittels vollständiger Induktion. Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$a_{n+1} = p\, a_n + q_{n+1} \overset{ind}{=} p \sum_{k=0}^{n} p^{n-k}\, q_k + q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} p^{n+1-k}\, q_k \qquad \checkmark$$

b) Nach oben abschätzen:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} p^{n-k}\, q_k \leq \sum_{k=0}^{n} p^{n-k} \cdot \bar{q}_n, \quad \text{mit} \quad \bar{q}_n = \max_{k \in \{1,\ldots,n\}} q_k$$

Falls $\{q_k\}$ beschränkt ist, d.h. $\overline{q} := \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} q_k < \infty$, folgt für $0 \leq p < 1$:

$$a_n \leq A := \frac{\overline{q}}{1-p} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

$\longrightarrow$

c) Für $q_n = 2^{-n}$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} p^{n-k}\, 2^{-k} \\
&= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} p^{n-k}\, 2^{n-k} \\
&= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} (2\,p)^{k} \\
&= 2^{-n} \cdot \frac{1-(2\,p)^{n+1}}{1-2\,p} \\
&= \frac{2^{-n}-2\,p^{n+1}}{1-2\,p} \quad \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \checkmark
\end{aligned}$$

für $0 \le p < 1,\ p \ne \frac{1}{2}$.

– Sonderfall $p = \frac{1}{2}$ ('0/0'): Positive (Null)Folge $\{a_n\}$ mit $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ist Majorante (Einschließungsprinzip). ✓

□

Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \Big(\frac{a}{n-b} - \frac{b}{n+a} \Big)$$

konvergent ?

Summanden auf gleichen Nenner bringen:

$$\frac{a}{n-b} - \frac{b}{n+a} = \frac{a(n+a) - b(n-b)}{(n+a)(n-b)} = \frac{(a-b)\,n + a^2 + b^2}{(n+a)(n-b)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a}{n-b} - \frac{b}{n+a} = (a-b) \underbrace{\frac{n}{(n+a)(n-b)}}_{\text{(i)}} + (a^2+b^2) \underbrace{\frac{1}{(n+a)(n-b)}}_{\text{(ii)}}$$

- ad (i):

$$\frac{n}{(n+a)(n-b)} \sim \frac{1}{n} \quad \text{für } n \to \infty \quad \text{(‘asymptotisch gleich’)}$$

d.h.

$$\frac{n}{(n+a)(n-b)} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{a}{n}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{b}{n}}}_{\to 1} \to \frac{1}{n} \quad \text{für } n \to \infty$$

und $\sum_n c/n$ $(c < 1)$ ist divergente Minorante.

- ad (ii):

$$\frac{1}{(n+a)(n-b)} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{für } n \to \infty$$

d.h.

$$\frac{1}{(n+a)(n-b)} = \frac{1}{n^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{a}{n}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{b}{n}}}_{\to 1} \to \frac{1}{n^2} \quad \text{für } n \to \infty$$

und $\sum_n c/n$ $(c > 1)$ ist konvergente Majorante.

$\Longrightarrow$ Reihe konvergent $\Leftrightarrow$ $a = b$.

□

Entscheiden Sie, ob bzw. für welche Werte von x (in b)) die folgenden Reihen bedingt bzw. absolut konvergieren:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,!}{k^k}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2\,k+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})$

c) $\displaystyle 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1}$ **d)** $\displaystyle 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{4}{5^{\,2k+1}} - \frac{1}{239^{\,2k+1}}\right)}{2\,k+1}$

---

a) Quotientenkriterium (Grenzwertformulierung):

$$\frac{\dfrac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\dfrac{k\,!}{k^k}} = \frac{(k+1)!\,k^k}{k\,!\,(k+1)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^k} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} \to \frac{1}{e} < 1$$

$\Longrightarrow$ Reihe absolut konvergent.

b) Quotientenkriterium (Grenzwertformulierung):

$$\frac{\dfrac{|x|^{\,2k+3}}{(2\,k+3)!}}{\dfrac{|x|^{\,2\,k+1}}{(2k+1)!}} = \frac{|x|^2}{(2\,k+2)(2\,k+3)} \to 0\,, \quad k\to\infty, \quad \text{für beliebiges } x \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ Reihe absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

Anmerkung: **b)** ist die Potenzreihenentwicklung für $\sin x$ (später).

c) Reihe bedingt konvergent nach dem Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen, jedoch nicht absolut konvergent (vgl. harmonische Reihe).

d) Majorantenkriterium: Die Summe zweier geometrischer Reihen

$$4\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5^{\,2k+1}} + \frac{1}{239^{2k+1}}\right)$$

ist absolut konvergente Majorante. Die Reihe konvergiert absolut.

$\longrightarrow$

Freiwillige Zusatzaufgabe zu c), d):

Werten Sie für c) die Partialsummen der ersten $10, 20, 30, 40, \ldots$ Reihenglieder numerisch aus. Man sieht, gegen welchen Wert die Reihe offenbar konvergiert (beweisen können wir das hier – noch – nicht). Geben Sie eine Abschätzung für den Reihenrest der n-ten Partialsumme an.

Die Konvergenzgeschwindigkeit der Reihe c) ist sehr bescheiden. Werten Sie auch für die lustige Reihe d) die n-ten Partialsummen aus für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Was beobachten Sie?

- Partialsummen der sogenannten Leibniz-Reihe,

$$4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1}$$

konvergieren sehr langsam gegen $\pi = 3.141592653589793\ldots$ (später):

n	Wert
50	3.161198613...
100	3.151493401...
150	3.148215098...
200	3.146567747...
250	3.145576702...
300	3.144914904...
...	...

- Partialsummen der lustigen Reihe,

$$4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{4}{5^{\,2k+1}} - \frac{1}{239^{\,2k+1}} \right)}{2\,k+1}$$

konvergieren offenbar sehr schnell gegen π :

n	Wert
1	3.140597029...
2	3.141621029...
3	3.141591772...
4	3.141592682...
5	3.141592653...
..	...

□

Zeigen Sie:

Falls die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

Reihe konvergent $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ ist Nullfolge

$\Rightarrow \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \ |a_n| < 1 \ \text{ für } \ n \geq N$

$\Rightarrow \quad a_n^2 < |a_n| \ \text{ für } \ n \geq N$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \ \text{ ist konvergente Majorante für } \sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 \ .$$

$\square$

Sei $c \in \mathbb{R}$ gegeben. Entscheiden Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die sogenannte *binomische Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{c}{n} x^n$$

absolut konvergiert.

$\displaystyle\binom{c}{n} := \frac{c(c-1)\cdots(c-n+1)}{n!}$ ist der verallgemeinerte Binomialkoeffizient

(mit $c \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0$).

Quotientenkriterium (Grenzwertformulierung):

$$\frac{\binom{c}{n+1} x^{n+1}}{\binom{c}{n} x^n} = \frac{\frac{c(c-1)\cdots(c-(n+1)+1)}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{c(c-1)\cdots(c-n+1)}{n!} x^n} = \frac{c-n}{n+1}\, x$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c-n|}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1-\frac{c}{n}|}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

$\Longrightarrow$ Reihe konvergent falls $|x| < 1$.

Reihe divergent falls $|x| > 1$. Für $|x| = 1$ keine unmittelbare Aussage möglich.

$\square$

Gegeben seien die Folgen $(a_k) = (p^k)$ und $(b_k) = (q^k)$, wobei $|p| < 1$ und $|q| < 1$. Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sind konvergente geometrische Reihen.

a) Bestimmen Sie den Wert der zugehörigen Cauchy'schen Produktreihe.

b) (*) Welcher Sonderfall tritt hier auf? Diskutieren Sie diesen separat.

---

a) Produkt zweier absolut konvergenter geometrischer Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{1-q}$$

Dazu äquivalent: Darstellung als Cauchy-Produkt,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad \text{mit} \quad c_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_{k-\ell}\, b_\ell$$

Berechnung der c_k (siehe VO Lemma 1.2, bzw. geometrische Summe):

$$c_k = \sum_{\ell=0}^{k} p^{k-\ell} q^{\ell} = \sum_{j=1}^{k+1} p^{k+1-j} q^{j-1} = \frac{p^{k+1} - q^{k+1}}{p-q} \quad (\text{für } p \neq q)$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{k+1} - q^{k+1}}{p-q} = \frac{1}{p-q} \Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} p^{\ell} - \sum_{\ell=1}^{\infty} q^{\ell} \Big)$$

$$= \frac{1}{p-q} \Big(\frac{p}{1-p} - \frac{q}{1-q} \Big) = \ldots = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{1-q} \quad \checkmark$$

b) Sonderfall: $p = q$ ('konfluenter' Fall; oben hätte man $0/0$):

$$c_k = \sum_{\ell=0}^{k} q^{k-\ell} q^{\ell} = (k+1)\, q^k$$

$\Rightarrow$ Cauchy-Produkt einer geometrischen Reihe mit sich selbst ist 'verallgemeinerte geometrische Reihe'. Folgerung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$\longrightarrow$

Anmerkung: Aus obigem folgt auch $\sum_{k=1}^{\infty} k\,q^k \;=\; \dfrac{q}{(1-q)^2}$.

Wie beweist man das direkt? Systematisch anschreiben ('Mustererkennung'):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\,q^k &= q + 2\,q^2 + 3\,q^3 + 4\,q^4 + \ldots + n\,q^n \\ &= q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^n \\ &\qquad + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^n \\ &\qquad\qquad + q^3 + q^4 + \ldots + q^n \\ &\qquad\qquad\qquad + q^4 + \ldots + q^n \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots + \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + q^n\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\,q^k &= q\,(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}) \\ &\qquad + q^2\,(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2}) \\ &\qquad\qquad + q^3\,(1 + q + \ldots + q^{n-3}) \\ &\qquad\qquad\qquad + q^4\,(1 + \ldots + q^{n-4}) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots + \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + q^n \cdot (1)\end{aligned}$$

Also, mit $S_k := \sum_{\ell=0}^{k} q^\ell$:

$$\sum_{k=1}^{n} k\,q^k \;=\; q\,S_{n-1} + q^2 S_{n-2} + q^3 S_{n-3} + \ldots + q^n S_0$$

und wegen $S_k = \dfrac{1-q^{k+1}}{1-q}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\,q^k &= \frac{1}{1-q}\Big(q\,(1-q^n) + q^2\,(1-q^{n-1}) + \ldots + q^n\,(1-q)\Big) \\ &= \frac{1}{1-q}\Big(q + q^2 + \ldots + q^n \;-\; n\,q^{n+1}\Big) \\ &= \frac{1}{1-q}\Big(q\,S_{n-1} \;-\; n\,q^{n+1}\Big) \\ &= \underbrace{\frac{q\,(1-q^n)}{(1-q)^2}}_{\to \frac{q}{(1-q)^2}} \;-\; \underbrace{n\,\frac{q^{n+1}}{1-q}}_{\to\, 0}\end{aligned}$$

$n \to \infty$: Reihe konvergent. ✓

$\longrightarrow$

Anmerkung: Strenger Beweis von

$$\sum_{k=1}^{n} k\, q^{k} \;=\; \frac{q\,(1-q^{n})}{(1-q)^2} - n\,\frac{q^{n+1}}{1-q}$$

erfolgt mittels vollständiger Induktion:

- $n = 1:$

$$1 \cdot q^1 \;=\; \frac{q\,(1-q^1)}{(1-q)^2} - 1 \cdot \frac{q^2}{1-q} \;=\; \frac{q-q^2}{1-q} \qquad \checkmark$$

- $n \mapsto n+1:$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k\, q^{k} &\overset{ind}{=} \frac{q\,(1-q^{n})}{(1-q)^2} - n\,\frac{q^{n+1}}{1-q} + (n+1)\,q^{n+1} \\
&= \frac{q\,(1-q^{n+1})}{(1-q)^2} + \frac{q^{n+2}-q^{n+1}}{(1-q)^2} - n\,\frac{q^{n+1}}{1-q} + (n+1)\,\frac{q^{n+1}(1-q)}{1-q} \\
&= \frac{q\,(1-q^{n+1})}{(1-q)^2} - \underbrace{\frac{q^{n+1}(1-q)}{(1-q)^2} - n\,\frac{q^{n+1}}{1-q} + (n+1)\,\frac{q^{n+1}(1-q)}{1-q}} \\
&= \frac{q\,(1-q^{n+1})}{(1-q)^2} - \frac{\cancel{q^{n+1} + n\,q^{n+1}} - \cancel{(n+1)\,q^{n+1}(1-q)} + (n+1)\,q^{n+2}}{1-q} \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

$\square$

Neben den in der VO besprochenen Kriterien für die Konvergenz von Reihen gibt es auch weitere Kriterien, z.B. das sogenannte *Verdichtungskriterium:*

Ist $\{a_n\}$ *eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *genau dann, wenn die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

konvergiert.

Verwenden Sie dieses Kriterium, um zu zeigen, dass die verallgemeinerte harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

für $\alpha > 1$ konvergiert.

Für $\alpha > 0$ ist $\{a_n\} = \{\frac{1}{n^\alpha}\}$ eine monoton fallende Nullfolge.

Betrachte

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{\alpha k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2^\alpha}\right)^k$$

... geometrische Reihe, konvergent für

$$\frac{2}{2^\alpha} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2^1 < 2^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \alpha \quad \checkmark$$

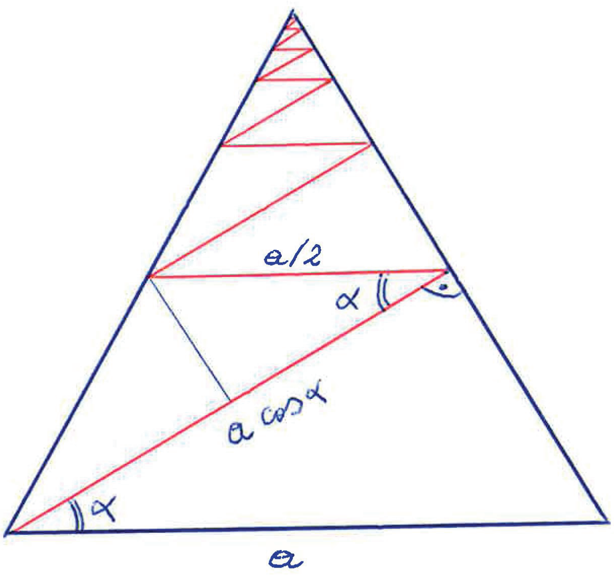
$\square$

Ein punktförmiges Tierchen namens Bello startet im linken unteren Eck eines gleichseitigen Dreiecks Δ mit Seitenlänge a m und krabbelt mit konstanter Geschwindigkeit v m/s geradlinig auf den Mittelpunkt der gegenüber liegenden Seite zu. Dann kehrt es um und krabbelt mit Geschwindigkeit v waagrecht bis zur linken Kante zurück. Dann wiederholt sich dieser Vorgang 'unendlich oft', wobei sich Bellos Geschwindigkeit in der n-ten Iteration auf v/n^p verlangsamt, mit $p \in \mathbb{N}$. Im Limes landet Bello in der oberen Ecke von Δ.

a) Einen wie langen Weg legt Bello insgesamt zurück?

b) Erreicht er sein Ziel in endlicher Zeit, bzw. hängt dies von p ab?

(Machen Sie eine Skizze.)



$$\alpha = \tfrac{\pi}{6}, \quad \cos\alpha = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

a) 1. Iteration: Wegstrecke $l_1 = a\cos\alpha + a/2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\, a$

2. Iteration: Wegstrecke $l_2 = l_1 \,/\, 2$

usw.: $l_n = l_1 \cdot 2^{1-n} = (1+\sqrt{3})\, a\, 2^{-n}$

$\Longrightarrow$ Gesamte Wegstrecke:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = (1+\sqrt{3})\, a \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = (1+\sqrt{3})\, a\, \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = (1+\sqrt{3})\, a \ [\mathrm{m}]$$

Insbesondere: $l_1 = \sum_{n=2}^{\infty} l_n$

$\longrightarrow$

b) n - ter Schritt:

$$\text{Laufzeit für } n\text{ - te Teilstrecke} = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}} = \frac{(1+\sqrt{3})\,a\,2^{-n}}{v/n^p}$$

$$= \frac{a}{v}\,(1+\sqrt{3})\,n^p\,2^{-n}\ [\mathrm{s}]$$

Wende auf

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p\,2^{-n} \quad \text{(verallgemeinerte geometrische Reihe)}$$

Quotientenkriterium (Grenzwertformulierung) an:

$$\frac{(n+1)^p\,2^{-(n+1)}}{n^p\,2^{-n}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \to \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\Longrightarrow$ Das Ziel wird in endlicher Zeit erreicht für beliebige $p \in \mathbb{N}$.

Anmerkung: Für beliebige $|q| < 1$ und $p \in \mathbb{N}$ ist die verallgemeinerte geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^p\,q^n$ absolut konvergent (Quotientenkriterium).

$\square$

Gegeben sei die Funktion $f\colon (-\delta,\delta)\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) \;=\; \frac{\sqrt{1+p(x)}\; - \;1}{x^2}\,,$$

wobei $p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x^i$ ein gegebenes Polynom ist mit $p(0) = 0$.

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ ist wohldefiniert für hinreichend kleines $\delta > 0$.

b) Für $x = 0$ ergibt sich der undefinierte Ausdruck '$f(0) = 0/0$'. Untersuchen Sie, für welche Polynome p an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vorliegt. Falls dies zutrifft, geben Sie den Wert der stetigen Fortsetzung an, d.h. den Limes

$$\lim_{x\to 0} f(x)\,.$$

In welcher Weise hängt dieser Limes von dem Polynom p ab?

---

a) $p(0) = 0$, und $p(x)$ ist stetig $\;\Rightarrow\; \exists\, \delta > 0 \,:\; |p(x)| < 1 \;$ für $\; |x| < \delta$

$\Longrightarrow \quad \sqrt{1+p(x)} \in \mathbb{R}$ und $f(x)$ wohldefiniert für $|x| < \delta$. ✓

b) Umformen:

$$f(x) \;=\; \frac{\sqrt{1+p(x)}\; - \;1}{x^2} \;=\; \frac{(\sqrt{1+p(x)}\; - \;1)(\sqrt{1+p(x)}\; + \;1)}{x^2\,(\sqrt{1+p(x)}\; + \;1)} \;=\; \frac{p(x)}{x^2\,(\sqrt{1+p(x)}\; + \;1)}$$

- Für $a_1 = 0$ (d.h. $p'(0) = 0$) ist

$$p(x) \;=\; a_2\, x^2 + a_3\, x^3 \;=\; x^2\,(a_2 + a_3\, x + \ldots)$$

und

$$\lim_{x\to 0} f(x) \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{a_2 + a_3\, x + \ldots}{\sqrt{1+p(x)}\; + \;1} \;=\; \frac{a_2}{2}$$

mit hebbarer Unstetigkeit.

- Für $a_1 \neq 0$ liegt eine echte Unstetigkeit vor, mit $\lim_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$.

Alternativen zur Bestimmung des Grenzwertes: *Regel von de l'Hospital*, oder *Taylor-Entwicklung* (später). □