a) Zeigen Sie dass die Funktion $f\colon\ (0,\infty) \to \mathbb{R}^+$,

$$f(x) \;=\; x^2\, e^{1/x}$$

strikt konvex ist und dass sie eine eindeutige Minimalstelle $x = x_{min}$ besitzt. Geben Sie x_{min} und $f(x_{min})$ an.

b) Gleiche Frage wie unter a), für

$$f(x) \;=\; e^x\, e^{1/x}$$

---

a) Ableitungen von $f(x) = x^2\, e^{1/x}$:

$$f'(x) \;=\; 2\,x\,e^{1/x} + x^2\,e^{1/x}\big(-\tfrac{1}{x^2}\big) \;=\; (2\,x-1)\,e^{1/x}$$

$$f''(x) \;=\; 2\,e^{1/x} + (2\,x-1)\,e^{1/x}\big(-\tfrac{1}{x^2}\big) \;=\; \frac{2\,x^2-2\,x+1}{x^2}\;e^{1/x}$$

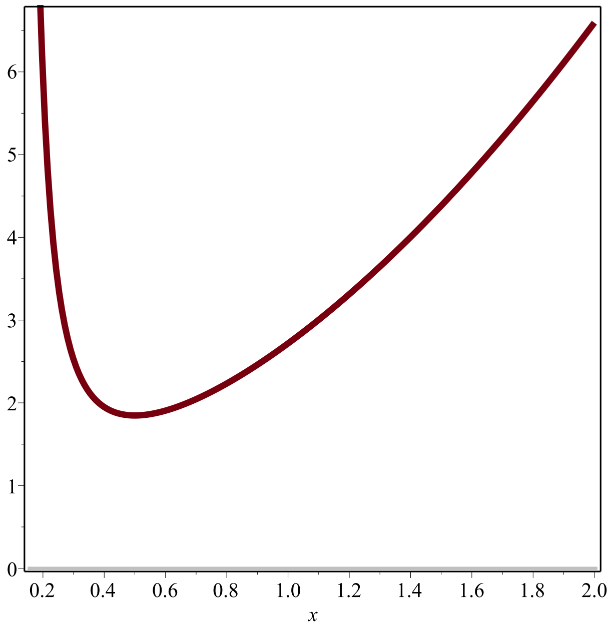
mit

$$2\,x^2-2\,x+1 \;=\; x^2+(x^2-2\,x+1) \;=\; x^2+(x-1)^2 > 0 \;\;\text{für}\;\; x>0$$

$\Longrightarrow\;\; f$ ist strikt konvex. ✓

x_{min} ist eindeutige Nullstelle von f' :

$$x_{min} = \frac{1}{2}\,, \qquad f(x_{min}) = \frac{e^2}{4} \approx 1.85$$



$\longrightarrow$

b) Ableitungen von $f(x) = e^x\, e^{1/x}$:

$$f'(x) \;=\; e^x\, e^{1/x} + e^x\, e^{1/x}\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) \;=\; e^x\, e^{1/x}\, \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$f''(x) \;=\; \ldots \;=\; e^x\, e^{1/x}\, \frac{x^4 - 2\,x^2 + 2\,x + 1}{x^4}$$

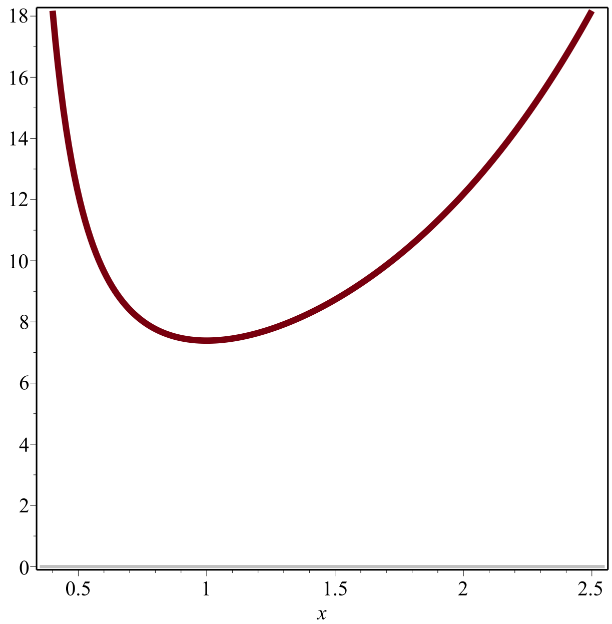
mit

$$x^4 - 2\,x^2 + 2\,x + 1 \;=\; (x^4 - 2\,x^2 + 1) + 2\,x \;=\; (x^2-1)^2 + 2\,x > 0 \;\text{ für } x > 0$$

$\Longrightarrow$ f ist strikt konvex. ✓

x_{min} ist eindeutige Nullstelle von f' :

$$x_{min} = 1, \qquad f(x_{min}) = e^2 \approx 7.40$$



□

a) Seien $x, y \geq 0$ und $p \geq 1$ reelle Zahlen. Beweisen Sie die Ungleichung

$$(x+y)^p \;\leq\; 2^{p-1}(x^p + y^p)$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion $f(\xi) = \xi^p$ konvex ist für $\xi \geq 0$, und nützen Sie dies aus.

b) (*) Für den Spezialfall $p \in \mathbb{N}$ kann man die Ungleichung auch mittels vollständiger Induktion beweisen.

---

a) $f(\xi) = \xi^p$ ist konvex für $\xi \geq 0$:

$$f''(\xi) \;=\; p\,(p-1)\,\xi^{\,p-2} \;\geq\; 0 \quad \text{für} \quad \xi \geq 0,\; p \geq 1 \qquad \checkmark$$

Daher (gemäß Definition 9.8 der Konvexität, mit $\lambda = \frac{1}{2}$):

$$f\big(\tfrac{1}{2}(x+y)\big) \;\leq\; \tfrac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big)$$
$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2^p}\,(x+y)^p \;\leq\; \frac{1}{2}\,(x^p + y^p)$$
$$\Leftrightarrow \qquad (x+y)^p \;\leq\; 2^{p-1}(x^p + y^p) \qquad \checkmark$$

b) Induktionsbeweis für $p \in \mathbb{N}$:

- $p = 1: \;\; x + y \;=\; x + y \qquad \checkmark$
- $p \;\mapsto\; p+1:$

$$(x+y)^{p+1} \;=\; (x+y)(x+y)^p \;\overset{\text{IND}}{\leq}\; (x+y)\,2^{p-1}(x^p + y^p)$$
$$=\; 2^{p-1}\big(x^{p+1} + x\,y^p + y\,x^p + y^{p+1}\big)$$

mit

$$x\,y^p + y\,x^p \;=\; x^{p+1} + y^{p+1} + \underbrace{(x-y)(y^p - x^p)}_{\leq\,0}$$
$$\leq\; x^{p+1} + y^{p+1}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung für $p+1$. $\checkmark$

$\square$

Wir beweisen die **Young'sche Ungleichung**

$$x\,y \;\leq\; \frac{x^p}{p} + \frac{y^{\,q}}{q}$$

für alle $x, y \geq 0$, wobei $p > 1$ und q der zu p 'konjugierte' Exponent, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Halten Sie $y \geq 0$ beliebig fest und analysieren Sie die Funktion $f(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{y^{\,q}}{q} - x\,y$. Sehen Sie sich die Nullstelle von f' an und folgern Sie daraus das Resultat.

b) Alternativer Beweis: Drücken Sie $x\,y$ mittels exp und ln aus und argumentieren Sie mit der Konvexität von exp.

---

a) $\displaystyle \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad q \;=\; 1 + \frac{1}{p-1} \;=\; \frac{p}{p-1}$

- $\displaystyle f(x) \;=\; f(x;y) \;=\; \frac{x^p}{p} + \frac{y^{\,q}}{q} - x\,y$
- Es gilt
$$f(0) \;=\; \frac{y^{\,q}}{q} \;\geq\; 0\,, \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; \infty$$
- Ableitung von f:
$$f'(x) \;=\; x^{p-1} - y$$
- Nullstelle von f':
$$f'(x) \;=\; x^{p-1} - y \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \;=\; y^{\,1/p-1}\,, \quad \text{mit}$$
$$f(y^{\,1/p-1}) \;=\; \frac{(y^{\,1/p-1})^p}{p} + \frac{y^{\,q}}{q} - (y^{\,1/p-1})\,y^1 \;=\; \frac{y^{\,p/p-1}}{p} + \frac{y^{\,q}}{q} - y^{\,1+1/p-1}$$
$$= \frac{y^{\,q}}{p} + \frac{y^{\,q}}{q} - y^{\,q} \;=\; \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) y^{\,q} \;=\; 0$$

Folgerung: f nimmt sein globales Minimum 0 an $y^{\,1/p-1}$ an. q.e.d. ✓

b) Schreibe

$$x\,y \;=\; \exp(\ln x + \ln y) \;=\; \exp\left(\tfrac{1}{p}\,\ln x^p + \tfrac{1}{q}\,\ln y^q\right)$$

exp ist konvex $\;\Rightarrow\;$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\exp\left(\tfrac{1}{p}\ln x^p + \tfrac{1}{q}\ln y^q\right) \;\leq\; \frac{1}{p}\,\exp(\ln x^p) + \frac{1}{q}\,\exp(\ln y^q) \;=\; \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad ✓$$

$\square$

Gegeben sei die Funktion $f\colon\ (0,\infty) \to \mathbb{R}^+,\ f(x) \ = \ \dfrac{\big(\ln x\big)^2}{x}$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze. Charakterisieren Sie inbesondere das asymptotische Verhalten für $x \to 0$ und $x \to \infty$.

- Asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty\,, \qquad\qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

- Nullstelle von f: $x_0 = 1$
- 1. Ableitung f':

$$f'(x) \ = \ \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^2}{x^2} \ = \ \frac{2\ln x}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x^2} \ = \ \frac{\ln x\,(2-\ln x)}{x^2}$$

- Nullstellen von f':

$$x_1 \ = \ 1\,, \qquad x_2 \ = \ e^2 \ \approx \ 7.39$$

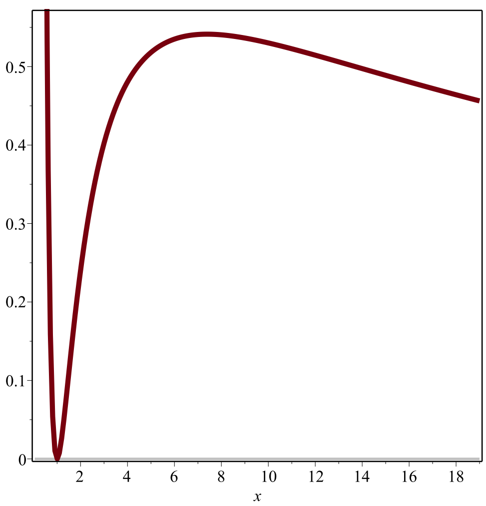
- 2. Ableitung f'':

$$f''(x) \ = \ \frac{2\left((\ln x)^2 - 3\ln x + 1\right)}{x^3}$$

- $\Longrightarrow$ lokales Minimum an $x_1 = 1$, lokales Maximum an $x_2 = e^2$.
  Dies zeigt auch die ‘ungefähre’ Lage zweier Wendepunkte.
- Nullstellen von f'': Quadratische Gleichung für $\ln x$, mit Lösungen

$$x_{3,4} \ = \ \exp\!\left(\tfrac{3}{2} \mp \tfrac{\sqrt{5}}{2}\right) \ \approx \ 1.47,\ 13.71$$

- Auswertung: $f'''(x_3) \neq 0,\ f''(x_4) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x_3,\ x_4$ sind Wendepunkte.



$\square$

Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x > 0$ mit

$$(1+x)^n \; < \; e\, n\, x$$

Geben Sie einen derartigen (von n abhängigen) Wert für x an.

- Es gilt $f(x) := \dfrac{(1+x)^n}{x} \; > \; 0$ für alle $x > 0$, mit

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

- Suche Minimalstelle in $(0, \infty)$. Ableitung von f :

$$f'(x) \;=\; \frac{n(1+x)^{n-1}\, x - (1+x)^n}{x^2} \;=\; \frac{(1+x)^{n-1}\big(nx - (1+x)\big)}{x^2}$$
$$\;=\; \frac{(1+x)^{n-1}\big((n-1)\,x - 1\big)}{x^2}$$

$\leadsto$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{n-1} \quad \text{für} \quad n \geq 2$$

mit

$$f\big(\tfrac{1}{n-1}\big) \;=\; \frac{\big(1+\frac{1}{n-1}\big)^n}{\frac{1}{n-1}} \;=\; \big(1+\tfrac{1}{n-1}\big)^{n-1}\big(1+\tfrac{1}{n-1}\big)(n-1)$$
$$\;=\; \big(1+\tfrac{1}{n-1}\big)^{n-1}(n - \cancel{1} + \cancel{1}) \; < \; n\, e\,.$$

- $x = \frac{1}{n-1}$ ist globale Minimalstelle von f mit

$$(1+x)^n \; < \; e\, n\, x \qquad \checkmark$$

- $n = 1$ ist Sonderfall. Keine Minimalstelle, aber $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.
  Wähle $x > 1/(e-1)$.

$\square$

Wir versuchen den Verlauf eines hängenden Seiles durch ein Polynom $p(x)$ vom Grad n zu beschreiben: $p(x)$ auf $[-1, 1]$, mit vorgegebenen Eigenschaften (eine verallgemeinerte Interpolationsaufgabe).

a) Wir wählen Grad $n = 2$ und fordern drei Eigenschaften:

- $p(-1) = p(1) = 1$
- $p'(0) = 0$

Ist das sinnvoll? Ist $p(x)$ eindeutig bestimmt?

b) Wir wählen Grad $n = 3$ und fordern zusätzlich

- $p''(0) = c$, wobei $c > 0$ vorgegeben.

Bestimmen Sie $p(x)$ in Abhängigkeit von dem Parameter c. Versuchen diesen 'physikalisch' zu interpretieren.

Was bedeutet $c = 0$ bzw. $c < 0$?

---

a) Ansatz:

$$p(x) \;=\; a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2, \quad \text{mit} \quad p'(x) \;=\; a_1 + 2\, a_2\, x$$

3 Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} p(-1) &= a_0 - a_1 + a_2 \;=\; 1 \\ p(1) &= a_0 + a_1 + a_2 \;=\; 1 \\ p'(0) &= a_1 \;=\; 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad a_0 + a_2 \;=\; 1,$ aber keine eindeutige Lösung.

b) Ansatz:

$$p(x) \;=\; a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3$$

mit

$$p'(x) \;=\; a_1 + 2\, a_2\, x + 3\, a_3\, x^2, \quad p''(x) \;=\; 2\, a_2 + 6\, a_3\, x$$

4 Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} p(-1) &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \;=\; 1 \\ p(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \;=\; 1 \\ p'(0) &= a_1 \;=\; 0 \\ p''(0) &= 2\, a_2 \;=\; c \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned} p(-1) &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 1 \\ p(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ p'(0) &= a_1 = 0 \\ p''(0) &= 2\,a_2 = c \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad a_1 = 0,\ a_2 = \frac{c}{2}$, und

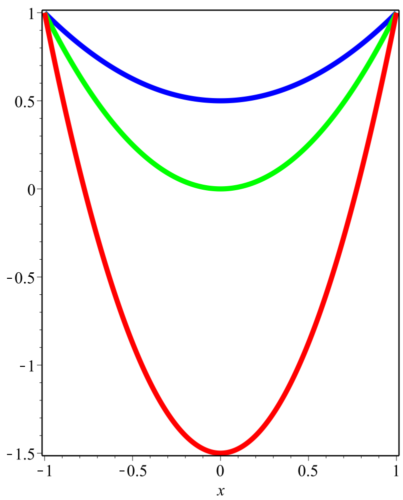
$$\begin{aligned} a_0 + \tfrac{c}{2} - a_3 &= 1 \\ a_0 + \tfrac{c}{2} + a_3 &= 1 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad a_3 = 0,\ a_0 = 1 - \frac{c}{2}\,. \quad \rightsquigarrow$

$$p(x) = 1 - \frac{c}{2} + \frac{c}{2}\,x^2 = 1 + \frac{c}{2}\,(x^2 - 1) \quad \text{eindeutig}$$

Quadratisches Polynom, gerade (beachte Symmetrie in der Angabe).

Verhalten für $c = 1$, $c = 2$, $c = 5$:



– $c = 0 \ \ldots p(x) \equiv 1$

– $c > 0$: $p(x)$ konkav, nicht konvex

– (Vage) ‘physikalische’ Interpretation von $c > 0$:

Z.B. Dichte, spezifisches Gewicht eines (elastisch dehnbaren) Seiles.

Anmerkung: Ein hängendes Seil wird nur bei kleiner Auslenkung (näherungsweise) durch eine Parabel beschrieben. Die richtige Auslenkung folgt einer cosh - Kurve (‘Kettenlinie’).

$\square$

Gegeben sei die Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \;=\; x + \ln(1 - x^4)$$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze.

Qualitative Argumentation anhand einer Skizze [Tafel] des Verhaltens von f :

- Asymptotisches Verhalten von f :

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$$

- Nullstelle von f : $x_0 = 0$, und – ?? (siehe unten)
- 1. und 2. Ableitung f', f'' :

$$f'(x) \;=\; 1 - \frac{4\,x^3}{1 - x^4} \;=\; \frac{x^4 + 4\,x^3 - 1}{x^4 - 1}\,, \qquad f''(x) \;=\; -\,\frac{4\,x^2\,(x^4 + 3)}{(x^4 - 1)^2}$$

  – Asymptotisches Verhalten von f' :

$$\lim_{x \to -1+} f'(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to 1-} f'(x) = -\infty$$

  $\Rightarrow$ $\exists$ Nullstelle von f' in $(-1,1)$

  – $f'(0) = 1 > 0 \quad \Longrightarrow$

  $\Rightarrow$ $f(x) > 0$ auf einem Intervall $(0,\delta)$ rechts von 0

  $\Rightarrow$ $\exists$ zweite Nullstelle x_1 von f in $(0,1)$. Wert: $x_1 \approx 0.874$

  und: $\exists$ lokale Maximalstelle x_2 von f in $(0, x_1)$

  und: $\nexists$ Nullstelle von f' in $(-1,0)$

- Nullstellen von f' :

$$x^4 + 4\,x^3 - 1 \;=\; 0 \quad \rightsquigarrow \quad x_2 \;\approx\; 0.601 \;\; \text{lokale Maximalstelle}$$

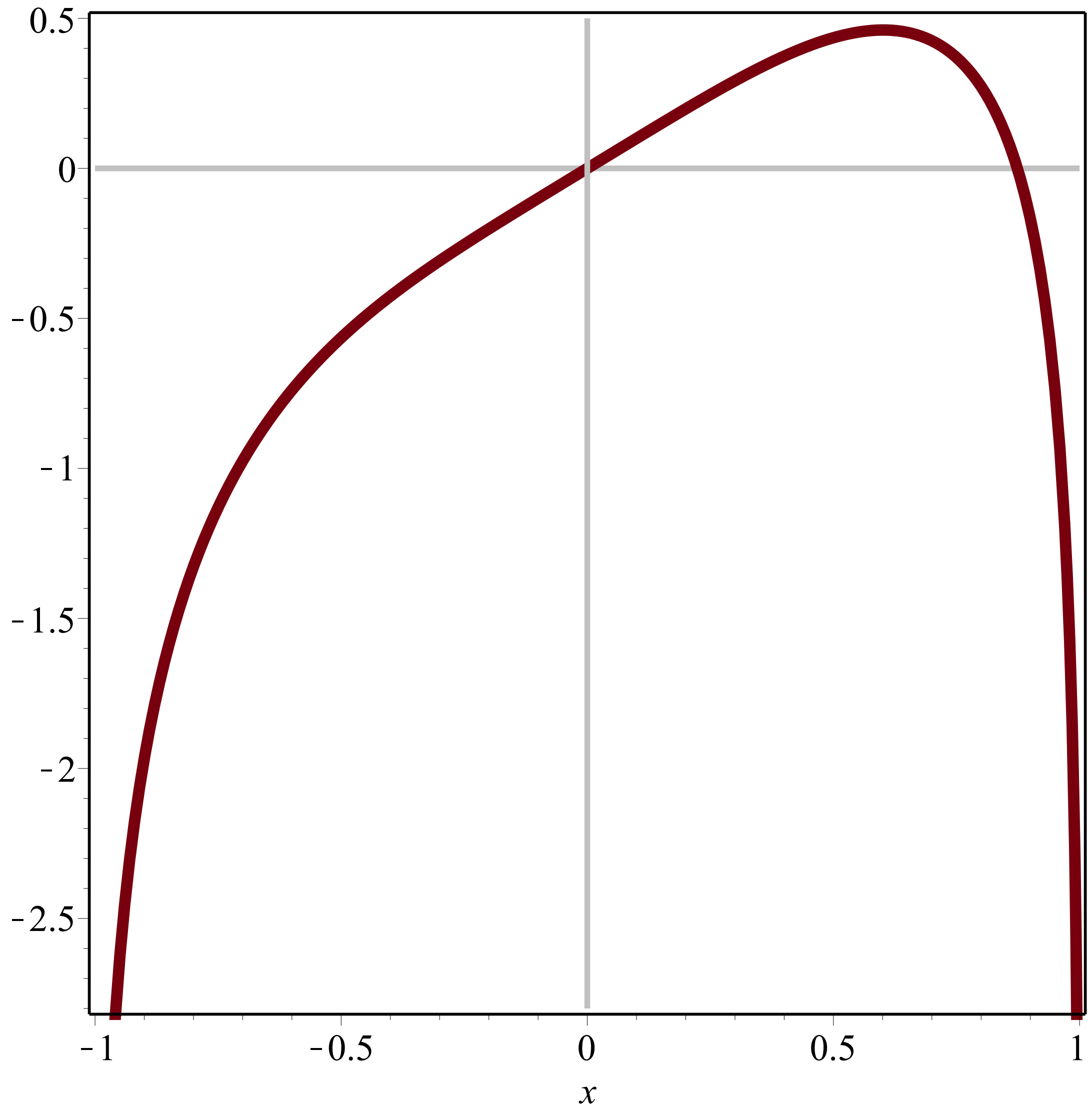
  (Die beiden anderen Nullstellen von f' sind konjugiert komplex.)

- Untersuchung der Stelle $x_0 = 0$: Rechnung ergibt

$$f''(0) = f'''(0) = 0\,, \qquad f^{IV}(0) = -24 < 0$$

  $\Rightarrow$ f ist ‘fast geradlinig’ aber konkav in der Nähe von $x_0 = 0$.

Anmerkung: Die Gleichung $f''(0) = 0$ hat nur eine reelle Lösung $x_0 = 0$.
$\Longrightarrow$ f hat keine Wendepunkte. $\longrightarrow$


0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-1
-0.5
0
0.5
1
x

UE 7 / Aufgabe 8

Sei $W(\cdot)$ die in UE 3, Aufgabe 8 eingeführte Funktion (die sogenannte Lambert W - Funktion). Schreiben Sie ein kleines Computerprogramm bzw. verwenden Sie den Taschenrechner, um $x = W(y)$ für gegebenes $y > 0$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens numerisch zu approximieren.

Verwenden Sie dies, um $W(1)$ zu bestimmen. Wählen Sie als Startnäherung $x_0 = 0.5$ ($0.5\, e^{0.5} \approx 0.82$ ist relativ nahe an 1). Beobachten Sie den Verlauf der Dezimalstellen der einzelnen Iterierten und das Residuum, um die Konvergenz zu beurteilen.

- Gleichung: $f(x) = 1$, mit

$$f(x) \;=\; x\, e^x, \qquad f'(x) \;=\; (1+x)\, e^x$$

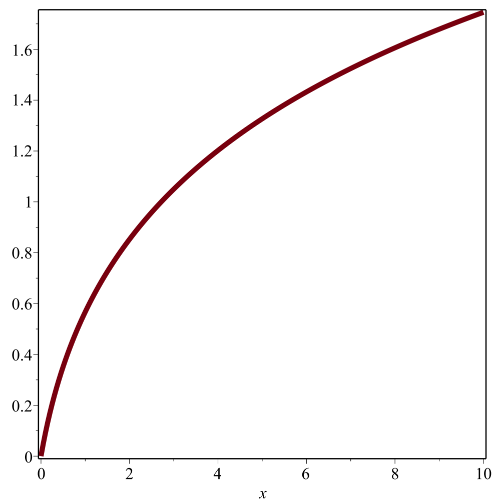
- Newton-Iteration:

$$x_{i+1} \;:=\; x_i \;-\; \frac{f(x_i) - 1}{f'(x_i)}\,, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

- Rechnung in double-Arithmetik (Werte x_i, Residuen $r_i = f(x_i) - 1$) :

```
-------------------------------------------
x0 = 0.5 000000000000000     r0 = -1.76e-01
x1 = 0.5 710204398084223     r1 =  1.07e-02
x2 = 0.5671 555687441145     r2 =  3.39e-05
x3 = 0.567143290 5332610     r3 =  3.41e-10
x4 = 0.5671432904097839      r4 =  0.00e+00
     auf 16 Dezimalstellen genau
-------------------------------------------
```

Lambert W - Funktion:



□

Sei x^* die exakte Lösung einer Gleichung $f(x) = 0$, d.h., $x^* = \varphi(0)$, wobei $\varphi = f^{-1}$ die (lokale) Umkehrfunktion von f bezeichnet.

a) Die Newton-Iteration $x_i \mapsto x_{i+1}$ zur Approximation von x^* basiert auf Linearisierung von f an den Stellen $x = x_i$, d.h., man ersetzt f durch ihre Tangente an der Stelle $(x_i, f(x_i))$ und bestimmt den Schnittpunkt x_{i+1} dieser Tangente mit der x-Achse.

Man kann dies auch so deuten: Linearisiert man die Umkehrfunktion $\varphi(y)$ an der Stelle $y_i = f(x_i)$, so erhält man

$$\begin{aligned} \varphi(y) \;&\approx\; \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(y - y_i) \\ \text{also:} \qquad x^* = \varphi(0) \;&\approx\; \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(-y_i) \;=:\; x_{i+1} \end{aligned}$$

Verwenden Sie die Rechenregel 9.10 (Ableitung der Umkehrfunktion), um zu zeigen, dass das so definierte x_{i+1} tatsächlich mit dem Ergebnis des Newton-Schrittes $x_i \mapsto x_{i+1}$ identisch ist.

b) (*) Die letztere Denkweise erlaubt es, ein verbessertes Newton-Verfahren zu konstruieren. Man approximiert $\varphi(y)$ durch ein Taylorpolynom höheren Grades (siehe Satz 10.1), z.B. zweiten Grades:

$$\begin{aligned} \varphi(y) \;&\approx\; \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(y - y_i) + \frac{1}{2}\,\varphi''(y_i)(y - y_i)^2 \\ \text{also:} \qquad x^* = \varphi(0) \;&\approx\; \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(-y_i) + \frac{1}{2}\,\varphi''(y_i)\,y_i^2 \;=:\; x_{i+1} \end{aligned}$$

Dann stellt x_{i+1} einen verbesserten Näherungswert dar.

Zeigen Sie, dass dies auf das verbesserte Newton-Verfahren in folgender Gestalt führt:

$$x_{i+1} \;:=\; x_i \;-\; \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\left(1 \;-\; \frac{1}{2}\,\frac{f(x_i)\,f''(x_i)}{f'(x_i)^2}\right)$$

c) Wenden Sie dieses verbesserte Newton-Verfahren auf das Beispiel von Aufgabe 8 an und vergleichen Sie.

---

a) $y_i = f(x_i),\;\; \varphi(y_i) = x_i,\;$ und $\qquad \underbrace{\varphi'(y_i) = \frac{1}{f'(x_i)}}_{\text{Ableitung der Umkehrfunktion}} \qquad \leadsto$

$$x_{i+1} \;=\; \varphi(y_i) \;-\; \varphi'(y_i)\,y_i \;=\; x_i \;-\; \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad \checkmark$$

$\longrightarrow$

b) (Erste und) zweite Ableitung der Umkehrfunktion $\varphi := f^{-1}$: Aus

$$x = \varphi(f(x))$$

folgt

$$1 = \frac{d}{dx}\,\varphi(f(x)) = \varphi'(f(x))\,f'(x) \quad\Rightarrow\quad \varphi'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

und weiter

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d^2}{dx^2}\,\varphi(f(x)) &= \frac{d}{dx}\,\big(\varphi'(f(x))\,f'(x)\big) \\ &= \varphi''(f(x))\,f'(x)^2 + \varphi'(f(x))\,f''(x) \\ &= \varphi''(f(x))\,f'(x)^2 + \frac{f''(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\varphi''(f(x)) = -\,\frac{f''(x)}{f'(x)^3}$$

$\leadsto$ verbessertes Newton-Verfahren:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \varphi(y_i) - \varphi'(y_i)\,y_i + \frac{1}{2}\,\varphi''(y_i)\,y_i^2 \\ &= x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - \frac{1}{2}\,\frac{f''(x_i)}{f'(x_i)^3}\,f(x_i)^2 \\ &= x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{f(x_i)\,f''(x_i)}{f'(x_i)^2}\right) \qquad \checkmark \end{aligned}$$

c) Rechnung in double precision:

```
-------------------------------------------
x0 = 0.5 000000000000000     r0 = -1.76e-01
x1 = 0.56 68171874162708     r1 = -9.01e-04
x2 = 0.567143290 3763937     r2 = -9.23e-11
x3 = 0.5671432904097838      r3 =  0.00e+00
     auf 16 Dezimalstellen genau
-------------------------------------------
```

□

(*) Betrachten Sie die Riemann-Summe

$$R_h(f) := h \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,, \quad \text{wobei} \quad h = \frac{1}{N}\,, \quad x_i = i\,h\,,$$

für eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Laut Definition des Riemann-Integrals gilt $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} R_h(f)$. Falls das Integral formelmäßig nicht berechenbar ist, kann man $R_h(f)$ für $h > 0$ als numerische Approximation verwenden ('Rechteckregel').

Im Folgenden betrachten wir zur Übung nur die einfache Funktion $f(x) = x^3$.

a) Berechnen Sie $I(f)$, indem Sie den Grenzwert $\lim_{h\to 0} R_h(f)$ bestimmen.

Hinweis/Anmerkung: Es gilt $\sum_{i=1}^{N} i^3 = \frac{1}{4} N^2 (N+1)^2$, wie man mittels vollständiger Induktion nachweist. Sie können dies auch als Teleskopsumme auffassen, indem Sie i^3 in der Form $\frac{1}{4}\big(i^2 (i+1)^2 - (i-1)^2 i^2\big)$ schreiben. Die Teleskopsumme ist das diskrete Analogon zu der Formel

$$I(f) = \int_0^1 x^3\,dx = \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right)dx = \frac{1}{4}\,.$$

b) Geben Sie für den Fehler $|R_h(f) - I(f)|$ eine Abschätzung in Abhängigkeit von h an. Wie schnell geht der Fehler gegen 0 für $h \to 0$?

c) Wie b), jedoch für die 'Trapezregel' [Skizze]

$$T_h(f) := h \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\,, \quad \text{mit} \quad h = \frac{1}{N}\,, \quad x_i = i\,h\,.$$

---

a) Riemann-Summe für $f(x) = x^3$, $N \to \infty$ $(h \to 0)$:

$$R_h(f) = h \sum_{i=1}^{N} x_i^3 = h \sum_{i=1}^{N} \frac{i^3}{N^3} = \frac{1}{N^4} \sum_{i=1}^{N} i^3$$

$$= \frac{1}{N^4}\left(\frac{1}{4} N^2 (N+1)^2\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{N}\right)^2 \to \frac{1}{4} \quad \text{für} \quad N \to \infty \quad \checkmark$$

b) Fehler in Abhängigkeit von $h = 1/N$:

$$R_h(f) - I(f) = \frac{1}{4}\left(\cancel{1} + \frac{2}{N} + \frac{1}{N^2}\right) - \cancel{\frac{1}{4}} = \frac{h}{2} + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{für} \quad h \to 0$$

$\longrightarrow$

c) Trapezsumme $T_h(f)$ ist arithmetisches Mittel einer 'linken' und einer 'rechten' Riemann-Summe (letztere ist dieselbe wie unter a)):

$$T_h(f) \;=\; \frac{1}{2}\big(R_h^-(f) + R_h^+(f)\big) \;=\; \frac{h}{2}\Big(\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) + \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Big)$$

Für $f(x) = x^3$:

$$\begin{aligned} T_h(f) \;&=\; \frac{h}{2}\Big(\sum_{i=0}^{N-1}\frac{i^3}{N^3} + \sum_{i=1}^{N}\frac{i^3}{N^3}\Big) \\ &=\; \frac{1}{2N^4}\Big(\frac{1}{4}(N-1)^2 N^2 + \frac{1}{4}N^2(N+1)^2\Big) \\ &=\; \frac{1}{8N^4}\Big(N^2\, 2\,(N^2+1)\Big) \;=\; \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{1}{N^2}\Big) \;\to\; \frac{1}{4} \quad \text{für} \quad N \to \infty \end{aligned}$$

Fehler in Abhängigkeit von $h = 1/N$:

$$T_h(f) - I(f) \;=\; \frac{1}{4}\Big(\cancel{1} + \frac{1}{N^2}\Big) - \cancel{\frac{1}{4}} \;=\; \frac{h^2}{4} \quad \text{für} \quad h \to 0$$

... Fehler geht schneller gegen 0 als für $R_h(f)$.

$\square$