

ANALYSIS 1 für TPH, UE

Aufgabensammlung für Studierende der
Technischen Physik

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Beispiele	5
1 Einführung	5
1.1 Aussagenlogik	5
1.2 Vollständige Induktion	5
1.3 Rekursive Definition	8
1.4 Geometrische Summenformel und binomischer Lehrsatz	8
2 Grundlagen der Mengenlehre	10
2.1 Mengenoperationen	10
2.2 Abbildungen und Äquivalenz von Mengen	11
3 Die reellen Zahlen	14
3.1 Die Betragsfunktion	14
3.2 Mengen von reellen Zahlen	14
4 Zahlenfolgen	15
4.1 Grenzwerte	15
4.2 Rekursiv definierte Folgen	18
4.3 Uneigentliche Grenzwerte	19
4.4 Theoretische Beispiele	19
5 Reihen mit konstanten Gliedern	20
5.1 Grenzwerte	20
5.2 Konvergenz, Divergenz	21
5.3 Cauchyprodukt	23
6 Reelle Funktionen	24
6.1 Beschränktheit, Definitionsbereich	24
6.2 Stetigkeit	25
6.3 Gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit	27
6.4 Nullstellen	28
7 Polynome und algebraische Gleichungen	29
7.1 Nullstellen, Linearfaktoren	29
7.2 Interpolation	31
7.3 Partialbruchzerlegung	31

8	Elementare Funktionen	32
8.1	Trigonometrische und zyklometrische Funktionen	32
8.2	Graphische Aufgaben	34
8.3	Exponentialfunktion, Logarithmus	35
8.4	Hyperbelfunktionen	36
9	Differentialrechnung	36
9.1	Differenzieren	36
9.2	Differenzierbarkeit, stetige Differenzierbarkeit	39
9.3	Fehlerrechnung	39
9.4	Monotonie, Mittelwertsatz	41
9.5	Unbestimmte Ausdrücke	42
10	Lokales und globales Verhalten von Funktionen	43
10.1	Die Größenordnung von Funktionen	43
10.2	Extremwertaufgaben	44
10.3	Kurvendiskussion	45
11	Iterationsverfahren	46
11.1	Newtonverfahren	46
12	Das Riemannsches Integral	46
12.1	Integralrechnung	46
12.2	Uneigentliche Integrale	53
13	Funktionsfolgen und Funktionenreihen	54
13.1	Konvergenz	54
14	Potenzreihen	56
14.1	Konvergenzradius, Grenzfunktion	56
14.2	Taylorreihen, Taylorpolnome	57
A	Die komplexen Zahlen	59
A.1	Die Gauß'sche Zahlenebene	59
A.2	Rechnen mit komplexen Zahlen	60

Teil II: Lösungen und Hinweise	61
1 Einführung - Lösungen und Hinweise	61
1.1 Aussagenlogik	61
1.2 Vollständige Induktion	61
1.3 Rekursive Definition	62
1.4 Geometrische Summenformel und Binomialkoeffizient	63
2 Grundlagen der Mengenlehre - Lösungen und Hinweise	64
2.1 Mengenoperationen	64
2.2 Abbildungen und Äquivalenz von Mengen	64
3 Die reellen Zahlen - Lösungen und Hinweise	66
3.1 Der Betrag	66
3.2 Mengen von reellen Zahlen	67
4 Zahlenfolgen - Lösungen und Hinweise	67
4.1 Grenzwerte	67
4.2 Rekursiv definierte Folgen	68
4.3 Uneigentliche Grenzwerte	69
4.4 Theoretische Beispiele	69
5 Reihen mit konstanten Gliedern - Lösungen und Hinweise	69
5.1 Grenzwerte	69
5.2 Konvergenz, Divergenz	70
5.3 Cauchyprodukt	71
6 Reelle Funktionen - Lösungen und Hinweise	71
6.1 Beschränktheit, Definitionsbereich	71
6.2 Stetigkeit	72
6.3 Gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit	73
6.4 Nullstellen	74
7 Polynome und algebraische Gleichungen - Lösungen / Hinweise	74
7.1 Nullstellen, Linearfaktoren	74
7.2 Interpolation	74
7.3 Partialbruchzerlegung	75

8	Elementare Funktionen - Lösungen und Hinweise	75
8.1	Trigonometrische und zyklometrische Funktionen	75
8.2	Graphische Aufgaben	77
8.3	Exponentialfunktion, Logarithmus	77
8.4	Hyperbelfunktionen	77
9	Differentialrechnung - Lösungen und Hinweise	78
9.1	Differenzieren	78
9.2	Differenzierbarkeit, stetige Differenzierbarkeit	81
9.3	Fehlerrechnung	81
9.4	Monotonie, Mittelwertsatz	81
9.5	Unbestimmte Ausdrücke	82
10	Lokales und globales Verhalten von Funktionen - Lösungen und Hinweise	84
10.1	Die Größenordnung von Funktionen	84
10.2	Extremwertaufgaben	84
10.3	Kurvendiskussion	84
11	Iterationsverfahren - Lösungen und Hinweise	85
11.1	Newtonverfahren	85
12	Das Riemannsche Integral - Lösungen und Hinweise	85
12.1	Integralrechnung	85
12.2	Uneigentliche Integrale	90
13	Funktionsfolgen und Funktionenreihen - Lösungen / Hinweise	91
13.1	Konvergenz	91
14	Potenzreihen - Lösungen und Hinweise	92
14.1	Konvergenzradius, Grenzfunktion	92
14.2	Taylorreihen, Taylorpolynome	93
A	Die Komplexen Zahlen - Lösungen und Hinweise	95
A.1	Die Gauß'sche Zahlenebene	95
A.2	Rechnen mit komplexen Zahlen	95

Teil I: Beispiele

1 Einführung

1.1 Aussagenlogik

1.1.1

Zeigen Sie, dass

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

eine Tautologie ist.

1.1.2

Verifizieren Sie mittels einer Wahrheitstafel die folgenden Äquivalenzen

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B), \quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

1.1.3

Im Reisebüro schildert ein Kunde seine Wünsche für eine Urlaubsreise: "Wenn der Urlaubsort am Meer liegt, dann dürfen auf keinen Fall Berge in der Nähe sein. An einem Urlaubsort ohne Meer und ohne Berge muss sich unbedingt ein Schwimmbad befinden. Und noch etwas: Wenn es dort kein Meer und kein Schwimmbad gibt, dann geht es nicht ohne Berge!"

Verständlicherweise ist der Angestellte des Reisebüros etwas verwirrt. Helfen Sie ihm, indem Sie die Wünsche des Kunden als Aussageform darstellen und diese vereinfachen.

1.2 Vollständige Induktion

1.2.1

Berechnen Sie die folgende Summe und beweisen Sie das Ergebnis mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=1}^n (2j - 1)$$

1.2.2

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für $n \geq 4$:

$$n^2 \leq 2^n$$

1.2.3

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n}{6} (2n^2 + 3n + 1) \quad \forall n \geq 1$$

1.2.4

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=1}^n j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

1.2.5

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \forall n \geq 1$$

1.2.6

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{1}{(n-1)}\right)^{n-1} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \quad \forall n \leq 2$$

1.2.7

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^2} \quad x \neq +1, -1$$

1.2.8

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) > 1 + \sum_{i=1}^n a_i \quad a_i > 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

1.2.9

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{k} > \frac{n}{2} \quad \forall n > 1$$

1.2.10

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad x \geq -1$$

1.2.11

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

1.2.12

Leiten Sie die Anzahl der Diagonalen im n -Eck mittels vollständiger Induktion ab.

1.2.13

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1.2.14

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$(2n)! < 4^n (n!)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1.3 Rekursive Definition

1.3.1

Es sei $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$x_n < x_{n+1}$$

1.3.2

$g(n)$ sei rekursiv definiert durch

$$g(1) = 1, \quad g(n+1) = \frac{g(n)^2}{1 + g(n)}.$$

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $g(n) > 0$ für alle $n \geq 1$ und berechnen Sie $g(n)$ für $n \leq 5$.

1.3.3

Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert durch: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ und $u_{k+1} = u_{k-1} + u_k$.

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $u_n < (7/4)^n$ gilt.

1.4 Geometrische Summenformel und binomischer Lehrsatz

1.4.1

Beweisen Sie mit Hilfe der geometrischen Summenformel:

$$\sum_{i=0}^n (1-x)^i (1+x)^i = \begin{cases} \frac{1-(1-x^2)^{n+1}}{x^2}, & x \neq 0 \\ n+1, & x = 0 \end{cases}$$

Werten Sie beide Seiten der Gleichung für $n = 4$, $x = 2$ aus.

1.4.2

Berechnen Sie mit Hilfe der geometrischen Summenformel:

$$\text{a) } \sum_{i=0}^{10} 2^i \quad \text{b) } \sum_{j=6}^{12} 3^{-j} \quad \text{c) } \sum_{i=0}^n (1-x)^i (1+x)^i$$

1.4.3

Berechnen Sie:

$$\frac{\left[\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} \right] \binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}^2 - \binom{n+1}{k+1} \binom{n-1}{k-1}}$$

1.4.4

Benützen Sie den binomischen Lehrsatz, um den Koeffizienten von x^3y^7 in $(2x-3y)^{10}$ beziehungsweise den Koeffizienten von x^2y^2 in $(a^2x + 5by + 3aby)^4$ zu bestimmen.

1.4.5

Berechnen Sie mittels des binomischen Lehrsatzes folgende Summen:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k x^k \\ \text{b)} & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k \\ \text{c)} & \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \\ \text{d)} & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \end{array}$$

1.4.6

Berechnen Sie

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \quad \text{Hinweis: } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \\ \text{b)} & \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \quad \text{Hinweis: } \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \end{array}$$

1.4.7

Bestimmen Sie den Koeffizienten von $a^3b^9c^7$ in der Entwicklung von $(a-b-c)^{19}$.

1.4.8

Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 3$$

Hinweis: Schätzen Sie die Summe nach oben durch eine geometrische Summe ab.

2 Grundlagen der Mengenlehre

2.1 Mengenoperationen

2.1.1

Zeigen Sie, dass für alle Mengen A, B, C gilt:

- a) $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$
- b) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow (A = B) \text{ oder } (A = \{\}) \text{ oder } (B = \{\})$
- c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

2.1.2

Zeigen Sie: a) $A \cup (A \cap B) = A$ b) $A \cap (A \cup B) = A$

2.1.3

Seien A, B, C Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- a) $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B - A \cap B$
- b) $(A \cup B) \times C = (A \cup C) \times (B \cup C)$
- c) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C) = A \setminus (B \cap C)$
- d) $(A \setminus B) \cap C = A \setminus (B \cap C)$

2.1.4

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- a) $A \subseteq B$
- b) $A \cap B = A$
- c) $A \cup B = B$
- d) $A \setminus (A \setminus B) = A$

Hinweis: Zwei Aussagen sind äquivalent, wenn die eine aus der anderen folgt und umgekehrt.

2.1.5

Seien A und B Teilmengen einer Grundmenge M . Zeigen Sie:

- a) $A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \{\}$
- b) $A \subset B^C \Leftrightarrow A \cap B = \{\}$

2.1.6

Beweisen Sie die De Morganschen Regeln.

2.1.7

Gegeben seien folgende Mengen in der Grundmenge \mathbb{R}^2 :

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\} \quad B = \{(x, y) : (x - 5)^2 + y^2 \leq 25\}$$

Skizzieren Sie folgende Mengen:

$$A \cap B \quad A \cup B \quad A \setminus B \quad B \setminus A \quad A^C \quad B^C \quad (A \cap B)^C \quad A^C \cup B^C \quad (A \cup B)^C \quad A^C \cap B^C$$

2.1.8

Gegeben seien folgende Teilmengen der Grundmenge \mathbb{N} :

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar}\} \quad B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar}\}$$

Bilden Sie die folgenden Mengen:

$$A^C \quad B^C \quad A \cap B \quad A \setminus B \quad B \setminus A \quad A \times B \quad B \times A \quad A \cup B$$

2.1.9

Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen für alle Mengen A, B, C gelten:

- $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- $A \times B = B \times A$
- $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$

2.2 Abbildungen und Äquivalenz von Mengen

2.2.1

Gegeben sind die Funktionen

- $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \quad f(n, m) = \begin{cases} nm/2, & nm \text{ gerade} \\ -(nm + 1)/2, & nm \text{ ungerade} \end{cases}$
- $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N} \quad f(p/q) = |p| + |q|$ wenn $|p|, |q|$ teilerfremd sind
- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad f(n) = n + 1$

- d) $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N} \quad f(n) = n + 1$
 e) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad f(n) = 2n$
 f) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad f(z) = z^2$

Untersuchen Sie die Funktionen hinsichtlich der Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv.

2.2.2

Welche der folgenden Abbildungen ist injektiv, surjektiv, bijektiv? Geben Sie im Fall der Bijektivität die inverse Abbildung an:

- a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad x \rightarrow 3x + 1$
 b) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad x \rightarrow 3x + 1$
 c) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad x \rightarrow 3x + 1$
 d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow 3x + 1$

2.2.3

Welche der folgenden Funktionen $f : D \rightarrow B$ sind injektiv, surjektiv, bijektiv? Wie muss man den Definitionsbereich D gegebenenfalls einschränken, damit f injektiv wird? Wie muss man allenfalls den Bildbereich B verändern, damit f surjektiv wird? Bestimmen Sie weiters die Umkehrfunktionen der durch geeignete Einschränkungen hervorgehenden bijektiven Funktionen:

- a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} \quad B = \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{3+2x}{1-x}$
 b) $D = B = \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 |x|$

2.2.4

Für eine endliche Menge A definieren wir die Mächtigkeit $|A| :=$ Anzahl der Elemente von A .

- a) Zeigen Sie, dass für beliebig endliche Mengen A, B, C gilt:
 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
- b) Zeigen Sie $|P(A)| = 2^{|A|}$ für jede endliche Menge A , wobei $P(A)$ ist Potenzmenge (Menge aller Teilmengen) von A ist.

2.2.5

Die Mengen A, B seien abzählbar. Zeigen Sie, dass

1. $A \times B$ abzählbar ist.
(Wiederholen Sie den Beweis, dass die rationalen Zahlen abzählbar sind.)
2. $A \cup B$ abzählbar ist.

2.2.6

Beweisen Sie:

1. Die Menge der algebraischen irrationalen Zahlen ist abzählbar.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Menge der Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten abzählbar ist. Verwenden Sie weiters den Hauptsatz der Algebra: Jedes Polynom n -ten Grades (mit reellen Koeffizienten) hat höchstens n verschiedene reelle Nullstellen.
2. Die Menge der transzendenten Zahlen ist nicht abzählbar.

2.2.7

Überprüfen Sie, ob folgende Mengen abzählbar sind:

$$M = \{(\alpha, j) : \alpha \in \{A, B, C, \dots, Z\}, j \in \mathbb{N}\} \quad N = \{(m, n) : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, |m| > n\}$$

2.2.8

1. Zeigen Sie, dass die Menge $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 2\}$ äquivalent zur Menge $M_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \frac{4}{x}$, die Menge M_1 bijektiv auf M_2 abbildet.
2. Zeigen Sie, dass die Mengen $(-2, 2)$ und $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ äquivalent sind.
Hinweis: $\frac{x+2}{x-2}$

3 Die reellen Zahlen

3.1 Die Betragsfunktion

3.1.1

Zeigen Sie: $|x| \leq |y| \Rightarrow |y - x| + |x + y| = 2|y|$

3.1.2

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x , die die nachstehenden Ungleichungen erfüllen:

a) $|x - 1| \leq |x + 4|$ b) $|x - 4| < 2x + 3$

3.1.3

Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$, die die nachstehenden Ungleichungen erfüllen:

a) $x + |x - 2| = 1 + |x|$ b) $|x - 3| + |x - 1| < 4$

3.1.4

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x , die die nachstehenden Ungleichungen erfüllen:

a) $|x - 2| < |x + 5|$ b) $\frac{|x-2|}{|x+5|} < 1$

3.2 Mengen von reellen Zahlen

3.2.1

Sei $\partial A = \{\text{Randpunkte von } A\}$. Zeigen Sie: ∂A ist eine abgeschlossene Menge.

3.2.2

Zeigen Sie: Das Komplement einer abgeschlossenen Menge ist offen.

3.2.3

Bestimmen Sie $\partial\mathbb{R}$, $\partial\mathbb{Q}$, $\partial\mathbb{Z}$ als Teilmengen von \mathbb{R} .

3.2.4

Zeigen Sie:

$$\inf(A + B) \geq \inf A + \inf B \quad \text{mit} \quad A + B := \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$$

Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass $\inf(A - B) \geq \inf A - \inf B$ im allgemeinen *nicht* gilt.

3.2.5

Beweisen Sie, dass $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$ gilt.
Gilt auch $\sup(A - B) \leq \sup(A) - \sup(B)$?

Bemerkung: Falls Sie meinen, dass dies nicht zutrifft, finden Sie ein Gegenbeispiel.

3.2.6

Ermitteln Sie für die Mengen A, B, C alle inneren Punkte, Randpunkte, isolierten Punkte, Häufungspunkte sowie Supremum und Infimum:

$$A = (0, 1) \cup (1, 2) \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\} \quad C = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$$

3.2.7

Für die nachstehenden Teilmengen A, B, C reeller Zahlen finden Sie alle Randpunkte, isolierten Punkte, Maximum, Minimum (falls vorhanden), Supremum und Infimum. Welche der vorliegenden Mengen sind beschränkt?

$$A := \mathbb{Q} \cap (0, 2) \quad B := \{x \mid x^3 - 2x = 0\} \quad C := \{1, 1.1, 1.11, 1.111, \dots\}.$$

3.2.8

Konstruieren Sie eine Teilmenge der reellen Zahlen mit abzählbar vielen isolierten Punkten und folgenden Eigenschaften: Maximum bei 1, Infimum, aber kein Minimum bei 0, ein Häufungspunkt bei $\frac{1}{2}$.

4 Zahlenfolgen

4.1 Grenzwerte

4.1.1

Untersuchen Sie die Monotonie der Folgen:

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{2n - \sqrt{n}} \quad \text{b) } b_n = \frac{n!}{n^n}$$

Zeigen Sie weiters, dass a_n und b_n Nullfolgen sind.

4.1.2

Die Folge $\{a_n\}$ habe den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a$$

4.1.3

Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{b) } b_n = \frac{2n^3}{n^3 + n^2 + 1} \quad \text{c) } c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4$$

und bestimmen Sie für jede Folge ein N , so dass gilt:

$$\left| a_n - \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \right| < \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N$$

4.1.4

Zeigen sie, dass die folgenden Folgen Nullfolgen sind (auch mit Einschließungsprinzip):

$$\text{a) } a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \text{b) } b_n = \frac{n^2 + 1000n + 30020}{2n^3 - 1005}$$

4.1.5

Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen:

$$\text{a) } a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^5 \quad \text{b) } b_n = \frac{n^2}{4n^2 - n + 5}$$

und bestimmen Sie für jede Folge ein N , sodass gilt

$$\left| a_n - \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \right| < \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N.$$

4.1.6

Berechnen Sie die Grenzwerte von

$$\text{a) } a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^2} \quad \text{b) } b_n = \frac{1}{3n} \sin(2n^2)$$

und geben Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein geeignetes $N(\varepsilon)$ an.

4.1.7

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \quad \text{b) } b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$$

4.1.8

Die EULER-MASCHERONISCHE ZAHL ist definiert als

$$c := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

Mit Hilfe dieser Zahl berechne man den Limes der Folge

$$a_n = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$$

nachdem Voruntersuchungen (Monotonie etc.) durchgeführt wurden.

4.1.9

Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Hinweis: Verwenden Sie $n = [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n$, wenden Sie auf die rechte Seite den binomischen Lehrsatz an und schätzen Sie geeignet ab.

4.1.10

Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$$

Hinweis: Für $k < n$ gilt (siehe Vorlesung):

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n > 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right)$$

Lassen Sie n gegen unendlich gehen und wenden Sie das Vergleichskriterium an.

4.1.11

Beweisen Sie mittels $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und dem Einschließungsprinzip:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - 3n + 4} = 1$$

4.1.12

Berechnen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Hinweis: Benutzen Sie: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

4.2 Rekursiv definierte Folgen

4.2.1

Berechnen Sie für die rekursiv definierte Folge x_n rationaler Zahlen die ersten drei Glieder:

$$x_0 = 2 \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$$

4.2.2

In der Ebene wird eine Folge von Punkten (x_n, y_n) rekursiv konstruiert:

$$(x_0, y_0) = (1, 0) \quad (x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_n - y_n), \frac{1}{\sqrt{2}}(x_n + y_n)\right)$$

Bestimmen Sie (x_n, y_n) für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ (Skizze in der Ebene).

4.2.3

Berechnen Sie die ersten 6 Glieder der rekursiv definierten Folge:

$$x_1 = 1 \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$$

4.2.4

Zeigen Sie mit dem Einschließungsprinzip, dass $\{a_n\}$ eine Nullfolge ist:

$$a_{n+1} = \frac{n^3 + 6n + 2}{2n^3 + 7n + 4} a_n \quad a_0 > 0$$

4.2.5

Eine Folge sei durch $a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}$, $a_0 = 5$ rekursiv definiert.

- Die Annahme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ führt auf eine Gleichung für a , indem man in der Rekursion den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durchführt. Die Lösungen dieser Gleichung sind die möglichen Grenzwerte.
- Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $a_n > 2$.
- Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die Folge monoton fallend ist.
- Konvergiert die Folge? Wenn ja, was ist ihr Grenzwert?

4.2.6

Zeigen Sie mit der Methodik des vorhergehenden Beispiels, dass die durch

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \quad a_0 = 0$$

definierte Folge konvergiert. Berechnen Sie ihren Grenzwert.

4.3 Uneigentliche Grenzwerte

4.3.1

Geben Sie Beispiele von Folgen $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ an, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ gilt und

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = -\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n z_n = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n z_n = -1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n z_n = +\infty$

4.4 Theoretische Beispiele

4.4.1

Geben Sie eine präzise Formulierung der folgenden Aussagen:

- Die Folge $\{a_n\}$ konvergiert *nicht* gegen $a \in \mathbb{R}$.
- Die Folge $\{a_n\}$ konvergiert *nicht*.

Hinweis: Verwenden Sie dazu $\varepsilon, N(\varepsilon), \forall, \exists, \dots$

4.4.2

Zeigen Sie:

- a) Eine Folge $\{a_n\}$ konvergiert genau dann gegen x , wenn jede Teilfolge von $\{a_n\}$ gegen x konvergiert.
- b) Eine Folge $\{a_n\}$ konvergiert genau dann gegen x , wenn jede Teilfolge $\{a_{n_k}\}$ von $\{a_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{a_{n_{k_j}}\}$ besitzt, die gegen x konvergiert.

5 Reihen mit konstanten Gliedern

5.1 Grenzwerte

5.1.1

Berechnen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right)$$

5.1.2

Es sei die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ gegeben. Wie viele Reihenglieder muss man summieren, um einen Reihenrest kleiner als ε zu erhalten?

5.1.3

Berechnen Sie die Summe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$

5.1.4

Berechnen Sie die Summe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

5.1.5

Berechnen Sie die Summe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)}$

5.1.6

Berechnen Sie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

Hinweis: Geometrische Reihe und deren Ableitung.

5.2 Konvergenz, Divergenz

5.2.1

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\text{a) } \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^2-4n+3} \quad \text{b) } \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-4n+3}$$

5.2.2

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^3+1} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$$

5.2.3

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$$

5.2.4

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}3^n}{n^2}$$

5.2.5

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \binom{n+1}{n}} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

5.2.6

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+3)}{n!} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

5.2.7

Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

5.2.8

Verwenden Sie das Vergleichskriterium, um das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)^\alpha}{(6n^2+3n+1)^\beta}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ zu untersuchen.

5.2.9

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{3}{n}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

5.2.10

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-n}$

5.2.11

Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 4}{n^2(n-2)}$$

5.2.12

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$$

konvergiert. Zeigen Sie, dass die Reihe nicht absolut konvergiert, indem Sie eine Umordnung der Reihe angeben, die divergiert.

5.2.13

Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ auf Konvergenz:

$$u_n = (2 - \sqrt[n]{e})(2 - \sqrt[3]{e}) \cdots (2 - \sqrt[n]{e})$$

Hinweis: $e < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

5.2.14

Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ auf Konvergenz. Dabei ist u_n die n -te Fibonacci-Zahl.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $u_n > (5/4)^n$ für alle $n \geq 2$.

5.2.15

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Plotten Sie (mittels Taschenrechner oder PC) für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ die Graphen der Partialsummen $s_n(x)$, $x \in [-2\pi, 3\pi]$.

Hinweis:

$$s_0(x) = \frac{\pi}{2} \quad s_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x \quad s_2(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} \right)$$

Bemerkung: Die Reihe ist die Fourierreihe der 2π -periodischen Fortsetzung der Funktion $f(x) = |x|$, $x \in [\pi, \pi]$, d.h. es gilt:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \quad x \in [\pi, \pi]$$

5.3 Cauchyprodukt

5.3.1

Gegeben sind $\sum_{n=0}^{\infty} q_1^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} q_2^n$ mit $|q_1| < 1$, $|q_2| < 1$, $q_1 \neq q_2$. Bilden Sie die Cauchysche Produktreihe und berechnen Sie deren Summe.

5.3.2

Untersuchen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ auf absolute Konvergenz und bilden Sie die Cauchysche Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$. Werten Sie die Produktreihe für $x = 1$ und $y = -1$ aus.

5.3.3

Berechnen Sie das Cauchyprodukt:

$$\left(3 + \sum_{k=1}^{\infty} 3^k\right) \cdot \left(-2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k\right)$$

Interpretieren Sie das Ergebnis in Hinblick auf die Konvergenz der auftretenden Reihen.

Hinweis: 1) Dem ersten Faktor entspricht die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_0 = 3$, $a_k = 3^k$, $k \geq 1$, analog für den zweiten Faktor.

2) Zeigen Sie, dass für das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ gilt $c_0 = -6$, $c_n = 0$, $n \geq 1$.

6 Reelle Funktionen

6.1 Beschränktheit, Definitionsbereich

6.1.1

Sei $f(x) = \sqrt{x+2}$ und $g(x) = \frac{1}{x}$. Suchen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich von f und g , sodass $f \circ g$ bzw. $g \circ f$ definiert sind und bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$. Existiert eine Umkehrfunktion für $f \circ g$? Wenn ja berechnen Sie diese.

6.1.2

Gegeben sind die Funktionen

$$\text{a) } f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & x \in [n, n+1) \text{ } n \text{ gerade} \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{b) } f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ n & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \text{ } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\text{c) } f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{n} & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \text{ } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Graphen von f und klassifizieren Sie die Funktionen hinsichtlich der Begriffe nach unten und oben beschränkt bzw. beschränkt. Wo ist f stetig bzw. unstetig und von welcher Art sind die Unstetigkeitsstellen? Im Fall von Sprungstellen berechnen Sie die einseitigen Grenzwerte.

6.2 Stetigkeit

6.2.1

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von $f(x) = x^2 \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$, skizzieren Sie den Funktionsverlauf und untersuchen Sie die Stetigkeit. Bestimmen Sie zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ sodass $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$, wenn $0 < x < \delta$ gilt.

6.2.2

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 1 - \frac{x}{2\pi} & 0 < x < 2\pi \\ 1 & x = 2\pi \\ x - 2\pi & 2\pi < x < 4\pi \\ 0 & 4\pi \leq x \leq 6\pi \\ \frac{1}{x-6\pi} & x > 6\pi \end{cases}$$

Diskutieren Sie das Stetigkeitsverhalten von f , klassifizieren Sie die Unstetigkeiten und skizzieren Sie den Graphen.

6.2.3

Wo sind die folgenden Funktionen stetig bzw. unstetig und von welcher Art sind die Unstetigkeitsstellen? Im Fall von Sprungstellen berechnen Sie die einseitigen Grenzwerte. Skizzieren Sie die Graphen von f .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x-1 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & 0 < x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ \frac{1}{x-1} & x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{1}{1-x^2} & -1 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

6.2.4

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq -1 \\ \frac{1}{x} & -1 < x < 0 \\ \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0 \leq x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x^2 - 1 & x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{x^2-4x+3}{x^3-3x^2+2x} & x \neq 0, x \neq 1, x \neq 2 \\ 1 & x = 1 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

6.2.5

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & x = 0 \end{cases} \\ \text{b) } f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in (\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}] \quad n \in \mathbb{N} \\ n & x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}] \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

6.2.6

Beweisen Sie mit Hilfe der ε , δ -Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f(x) = \frac{x^2-1}{x+3}$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist. Bestimmen Sie ein δ für $\varepsilon = \frac{1}{10}$.

6.2.7

Sei

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f nur an $x = \frac{1}{2}$ stetig ist, und dass f das Intervall $[0, 1]$ bijektiv auf sich selbst abbildet.

6.2.8

Bestimmen Sie die Punkte $a \in \mathbb{R}$ an denen die folgende Funktion stetig ist:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

6.2.9

Finden Sie den maximalen Definitionsbereich von f , g , $f \circ g$, $g \circ f$, diskutieren Sie die Stetigkeit, und fertigen Sie Skizzen der Funktionsgraphen an. Falls $f \circ g$ eine Umkehrfunktion besitzt, berechnen Sie diese: $f(x) = \sqrt{2x-3}$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$.

6.2.10

Zeigen Sie mit Hilfe der Limesdefinition die Stetigkeit der Funktionen x^n und $\frac{1}{x^n}$ für $x \neq 0$.

6.2.11

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$ für $a \in \mathbb{R}$.

6.2.12

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

6.2.13

Wo sind die folgende Funktionen stetig bzw. unstetig und welche Art von Unstetigkeiten besitzen sie ?

$$\begin{aligned} a) f(x) &= (x-5)^2 (\operatorname{sgn}(x))^2 & b) f(x) &= x - [x] & c) f(x) &= [x] + [-x] \\ d) f(x) &= \frac{2x^2 + 7x - 15}{6x^3 - 7x^2 - 3x} & e) f(x) &= 2x + (-1)^{\operatorname{sgn}(x-3)} \end{aligned}$$

6.2.14

Zeigen Sie: Für jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f([a, b]) \subset [a, b]$ existiert ein $\zeta \in [a, b]$ mit $f(\zeta) = \zeta$.

6.2.15

Die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Zeigen Sie, dass f beschränkt ist.

6.3 Gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit

6.3.1

Zeigen Sie mittels der ε, δ -Definition, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{a}{1+a^2x^2}$ auf \mathbb{R} gleichmäßig stetig ist. Geben Sie für $a = 5$ und $\varepsilon = 10^{-4}$ ein entsprechendes δ an und fertigen Sie eine Skizze an!

6.3.2

Es sei $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{x^2+2x-(15+8a+a^2)}$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f definiert? Es sei D die Menge dieser x , wo f definiert ist. Ist f auf D stetig? (Falls ja, warum?). Für welchen Wert von a ist f gleichmäßig stetig? Für welche a besitzt f nur hebbare Unstetigkeiten?

6.3.3

Bestimmen Sie zu $\varepsilon = 10^{-3}$ ein δ so, dass die Funktion $f(x) = x^3 - 3$ im Intervall $[-5, 5]$ die ε, δ -Definition der gleichmäßigen Stetigkeit erfüllt und skizzieren Sie den Graphen.

6.3.4

Es sei $f(x) = \frac{1}{x^4 + 4x^2 + 4}$. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf gleichmäßige Stetigkeit. Bestimmen Sie $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$, soweit vorhanden. Geben Sie alle x an, für welche der Zwischenwert w mit $\inf(f) < w < \sup(f)$ angenommen wird und skizzieren Sie den Graphen.

6.3.5

Ist die Funktion $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 \sin\left(\frac{x^2}{x-2}\right)$ gleichmäßig stetig?

6.3.6

- Beweisen Sie mit Hilfe der ε, δ -Definition, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig stetig ist.
- Beweisen Sie, dass $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[0, 1]$ nicht Lipschitz-stetig ist.
- Beweisen Sie, dass $f(x) = \sqrt{x}$ in jedem Intervall $[x_0, x_1]$, $0 < x_0 < x_1$ Lipschitz-stetig ist, indem Sie eine Lipschitzkonstante explizit angeben.

6.3.7

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Skizzieren Sie den Graphen von f . Auf welchen Teilmengen von \mathbb{R} ist f monoton (Beweis)? Zeigen Sie, dass f auf \mathbb{R} Lipschitz-stetig ist und bestimmen Sie die Lipschitzkonstante.

6.4 Nullstellen

6.4.1

- Beweisen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x - 1$ eine Nullstelle x_0 im Intervall $[0, 1]$ hat.
- Beweisen Sie mit Hilfe einer Monotonieüberlegung, dass die Funktion f genau eine Nullstelle x_0 in $[0, 1]$ hat.

6.4.2

Berechnen Sie Näherungen für eine Nullstelle der Funktion f aus Beispiel 6.4.1 mit Hilfe der Halbierungsmethode:

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 1,$$

$$a_1 = 0, \quad b_1 = \frac{1}{2} \text{ wenn } f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = 1 \text{ wenn } f\left(\frac{1}{2}\right) < 0,$$

⋮

$$a_{i+1} = a_i, \quad b_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2} \text{ wenn } f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right) \geq 0$$

$$a_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad b_{i+1} = b_i \text{ wenn } f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right) < 0.$$

7 Polynome und algebraische Gleichungen

7.1 Nullstellen, Linearfaktoren

7.1.1

Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren. Verwenden Sie das Horner-Schema zum Abdividieren der Linearfaktoren:

a) $2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$

b) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

Hinweis: Sei $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, $x = p/q$ eine rationale Nullstelle des Polynoms. Dann gilt p ist Teiler von a_0 , q ist Teiler von a_n .

7.1.2

Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren. Verwenden Sie das Horner-Schema zum Abdividieren der Linearfaktoren.

a) $2x^3 + 11x^2 + 17x + 6$

b) $2x^3 + 9x^2 + 12x + 4$

7.1.3

Berechnen Sie die Nullstellen folgender Polynome und zerlegen Sie sie in Linearfaktoren:

a) $x^5 + 7x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 7x + 1$

b) $2x^6 + 11x^5 + 23x^4 + 28x^3 + 23x^2 + 11x + 2$

c) $x^8 + 3x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 1$

Hinweis: Ein Polynom mit symmetrischen Koeffizienten und ungerader Ordnung

besitzt immer die Nullstelle $x = -1$. Bei einem Polynom mit symmetrischen Koeffizienten und gerader Ordnung kann diese mit Hilfe der Substitution $x + \frac{1}{x} = u$ reduziert werden.

7.1.4

- a) $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$
b) $x^7 - 2x^6 - 19x^5 + 6x^4 + 108x^3 + 136x^2 + 128x + 128$.

Hinweis: Die Nullstellen sind ganzzahlig.

7.1.5

Oft genügt es zu wissen, ob ein Polynom nur Nullstellen mit einem negativen Realteil hat. Man überprüft das mit dem sogenannten *Hurwitz-Kriterium*:

Sei $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $a_0, \dots, a_3 \in \mathbb{R}$. Gilt $a_1 > 0$, $a_0 > 0$, $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$, $a_3(a_1a_2 - a_0a_3) > 0$, dann hat $p(x)$ nur Nullstellen mit negativem Realteil.

Überprüfen Sie diesen Satz anhand folgender Beispiele:

- a) $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ b) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

7.1.6

Bestimmen Sie die reelle Faktorisierung des Polynoms: $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 6$

7.1.7

Ein Polynom heißt *irreduzibel* in \mathbb{R} , falls es nicht als Produkt von zwei reellen Polynomen niedrigeren Grades dargestellt werden kann. (Der Grad eines in \mathbb{R} irreduziblen Polynoms ist höchstens 2.) Bestimmen Sie die reelle Faktorisierung folgender Polynome:

- a) $x^3 - x^2 + 2$
b) $x^6 + 5x^5 + 12x^4 + 16x^3 + 12x^2 + 4x$

Hinweis: -1 und $-1 + i$ sind Nullstellen.

7.1.8

Ein Polynom heißt *irreduzibel* in \mathbb{R} , falls es nicht als Produkt von zwei reellen Polynomen niedrigeren Grades dargestellt werden kann. (Der Grad eines in \mathbb{R} irreduziblen Polynoms ist höchstens 2.) Bestimmen Sie die reelle Faktorisierung folgender Polynome:

- a) $x^3 + x^2 - 2$
 b) $x^6 - 5x^5 + 12x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 4x$

Hinweis: 1 und $1 + i$ sind Nullstellen.

7.2 Interpolation

7.2.1

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom dritten Grades:

- a) $p(0) = 1$ $p(1) = p(2) = p(3) = -1$
 b) $p(0) = 3$ $p(1) = 0$ $p(2) = -1$ $p(3) = 0$

Werten Sie das Interpolationspolynom mittels Horner Schema an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ aus.

7.2.2

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom zweiten Grades: $p(0) = 0$, $p(\frac{\pi}{2}) = 1$, $p(\pi) = 0$. Zeichnen Sie den Graphen von $p(x)$ auf dem Intervall $[0, \pi]$.

7.3 Partialbruchzerlegung

7.3.1

Ermitteln Sie die Partialbruchzerlegung folgender rationaler Funktionen:

- a) $\frac{3x-3}{x^2+x-2}$ b) $\frac{2x^2+1}{(x-1)^2(x+2)}$ c) $\frac{3x^2-3x+1}{(x^2-2x+2)(x-1)}$
 d) $\frac{1}{(x^2-2x+2)^2(x-1)}$ e) $\frac{3x^2+3x+1}{(x^2+2x+2)(x+1)}$ f) $\frac{1}{(x^2+2x+2)^2(x-1)}$

7.3.2

Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen:

- a) $f(x) = \frac{x^3+x^2+3x+2}{(1+x^2)(x^2+2x+2)}$ b) $f(x) = \frac{x^4+4x^3+4x^2+x+1}{(x+2)^2}$
 c) $f(x) = \frac{x^3-x^2+3x-2}{(1+x^2)(x^2-2x+2)}$ d) $f(x) = \frac{x^4-4x^3+4x^2-x+1}{(x-2)^2}$

Bestimmen Sie alle Unendlichkeitsstellen. Untersuchen Sie das Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$. Bestimmen Sie ein Polynom $p(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} |p(x) - f(x)| = 0$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} |p(x) - f(x)| = 0$.

7.3.3

Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen:

- a) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$ b) $f(x) = \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+x^2-x-1}$

Bestimmen Sie alle Unendlichkeitsstellen. Untersuchen Sie das Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$. Bestimmen Sie ein Polynom $p(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} |p(x) - f(x)| = 0$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} |p(x) - f(x)| = 0$.

7.3.4

Schreiben Sie den Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{x^4 + 6x^3 + 5}{x^2(x-1)(x^2+4)} & \text{b) } f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^3(x^2+1)^2} \\ \text{c) } f(x) = \frac{x^5 + 7x^2 - 4}{(x^2 - 5x + 6)^4(x^4 + 4x^2 + 4)^3} & \text{d) } f(x) = \frac{x^6 + 7}{(x^3 - 1)^4(x^2 + 6)^3x^2} \end{array}$$

8 Elementare Funktionen

8.1 Trigonometrische und zyklometrische Funktionen

8.1.1

Stellen Sie dar:

- a) $\frac{\sin 3x}{\sin x}$ als Polynom in $\sin x$
 b) $\sin 2x$ und $\cos 2x$ als Funktion von $\tan x$

8.1.2

Zeigen Sie:

- a) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$
 b) $\cot \varphi = \frac{1}{2}(\cot \frac{\varphi}{2} - \tan \frac{\varphi}{2})$

8.1.3

Zeigen Sie:

$$5 + 8 \cos \varphi + 4 \cos 2\varphi + \cos 3\varphi = (1 + \cos \varphi)(1 + 2 \cos \varphi)^2$$

8.1.4

Bestimmen Sie Zahlen a_0, a_1, a_2, a_3 und a_4 , sodass die Gleichung $\sin^4 x = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \cos 4x$ erfüllt ist.

8.1.5

Bestimmen Sie α und $\rho \geq 0$ sodass:

- a) $2 \sin x + 7 \cos x = \rho \sin(x + \alpha)$ b) $3 \sin x - 6 \cos x = \rho \sin(x + \alpha)$

8.1.6

Zeigen Sie:

$$\text{a) } \frac{\cos \varphi + \frac{1}{2}}{\cos \varphi - \frac{1}{2}} = \cot \frac{\varphi}{2} \tan \frac{3\varphi}{2} \quad \text{b) } 1 + \frac{1}{\cos \varphi} = \cot \frac{\varphi}{2} \tan \varphi$$

8.1.7

Zeigen Sie:

$$\text{a) } 2 \arctan 10 + \arcsin \frac{20}{101} = \pi$$
$$\text{b) } \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \arcsin x = \frac{\pi}{4}$$

8.1.8

Bestimmen Sie x aus $(0, \frac{\pi}{2})$: $\arcsin x = \arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{4}{5}$.

8.1.9

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Ausdrücke rationale Funktionen in x sind:
 $\sin(2 \arctan x) \quad \tan(2 \arctan x) \quad \cos(2 \arctan x) \quad \cot(2 \arctan x)$

b) Drücken Sie folgende Größen in x aus:
 $\arccos(\sin x) \quad \sin(\arccos \frac{1}{x})$

8.1.10

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

Hinweis: $\sin \frac{x}{2^n} = \sin(2 \frac{x}{2^{n+1}})$

8.1.11

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f(x)$:

$$f(x) = \arccos x + \arctan x \quad -1 \leq x \leq 1$$

8.1.12

Es sei $f(x) = \sin(\tan(x^\beta))$, $\beta \in \mathbb{Q}$, $\beta > 0$. An welchen Stellen ist f unstetig und welcher Art sind die Unstetigkeitsstellen?

8.1.13

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ für $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}$ und $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

8.1.14

Sei $f(x) = \tan(2x)/x^2$.

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und skizzieren Sie den Graphen. Bestimmen Sie die Pole und deren Ordnung.

8.1.15

Sei $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, $g(x) = \pi(x-1)$. Finden sie den maximalen Definitionsbereich von f , g , $f \circ g$ und $g \circ f$, diskutieren Sie die Stetigkeit dieser Funktionen und skizzieren Sie ihre Graphen. Falls für $f \circ g$ eine Umkehrfunktion existiert, berechnen Sie diese.

8.1.16

Lösen Sie die Gleichungen:

a) $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$

b) $\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \arctan(3x)$

8.2 Graphische Aufgaben

8.2.1

Von einer Skizze für $f(x) = \arcsin x$ ausgehend ermitteln Sie Skizzen für:

a) $f(x) = \arcsin 3x$ b) $f(x) = \frac{1}{\arcsin x}$

c) $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$ d) $f(x) = \arcsin(x+1)$

8.2.2

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen:

a) $\tan x$ b) $\tan^2 x$ c) $\sqrt{\tan x}$ d) $\frac{1}{\tan x}$ e) $\frac{1}{3} \tan(3x)$

8.2.3

Skizzieren Sie die Funktionen a) $y = \frac{2x}{1-x^2}$ und b) $y = \arctan x$. Skizzieren Sie danach c) $f(x) = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$ und ermitteln Sie alle x mit $f(x) = 1$.

8.2.4

Untersuchen Sie graphisch das Lösungsverhalten folgender Gleichungen:

a) $\sin x = \alpha x$ b) $e^{\alpha x} = \sin x$ c) $\tan x = \alpha x$ $\alpha \in \mathbb{R}$

Skizzieren Sie die Graphen der linken und der rechten Seite der Gleichung. Bestimmen Sie jene Werte von α , bei denen sich das Lösungsverhalten der Gleichung ändert.

8.2.5

Skizzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = e^{\alpha x} \sin x$ $\alpha \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = e^{-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$

Bestimmen Sie Nullstellen und Unendlichkeitsstellen.

8.3 Exponentialfunktion, Logarithmus

8.3.1

Vereinfachen Sie:

a) $\log_a(\log_a(a^{ax}))$

b) $\log_3(7) - \log_{1/3}\left(\frac{1}{7}\right)$

8.3.2

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = x^{1/2} - x^{x/2}$ definiert? Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von f .

8.3.3

Vereinfachen Sie:

a) $a^{\ln(\ln a)/\ln a}$ b) $x^{\log_a y} / y^{\log_a x}$

c) $\log_{a_1}(a_2) \log_{a_2}(a_3) \cdots \log_{a_{n-1}}(a_n) \log_{a_n}(a_1)$

8.3.4

Lösen Sie: a) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ b) $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

8.4 Hyperbelfunktionen

8.4.1

Zeigen Sie: a) $\operatorname{arcosh}(4 \cosh^3 x - 3 \cosh x) = 3x$

b) $\operatorname{artanh}\left(\frac{2}{\frac{\cosh x}{\sinh x} + \tanh x}\right) = 2x$ c) $\operatorname{artanh} x + \operatorname{artanh} y = \operatorname{artanh}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

8.4.2

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = \tan(\operatorname{arsinh}(\cosh x))$ definiert? Für welche x ist f stetig?

9 Differentialrechnung

9.1 Differenzieren

9.1.1

Berechnen Sie die Ableitung von $\tan x$ mittels Differenzenquotienten.

9.1.2

Bestimmen Sie die Tangenten an die Kurve $(x, f(x))$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$:

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $x_0 = \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}$

b) $f(x) = \sin x + \cos x$ $x_0 = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$

c) $f(x) = x \ln x$ $x_0 = e$

9.1.3

Berechnen Sie $f'_+(0)$ für

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \alpha \geq 0$$

Berechnen Sie auch $f'(0+)$ sofern vorhanden. Was schließen Sie daraus für die Ableitungsfunktion?

9.1.4

Bestimmen Sie die links- und rechtsseitige Ableitung der Funktion $f(x) = x - [x]$ für ganzzahlige Werte $x = n$. Was können Sie über die Grenzwerte $f(n-)$ und $f(n+)$ aussagen?

9.1.5

Differenzieren Sie:

a) $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$
c) $f(x) = \frac{cx+d}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ d) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

9.1.6

Differenzieren Sie:

a) $f(x) = \frac{x^2+3x+5}{(x^2-1)^2(x+5)}$ b) $f(x) = \left(\frac{x}{\cos x}\right)^2$ c) $f(x) = \left(\frac{\cos x}{x}\right)^2$

9.1.7

Differenzieren Sie:

a) $f(x) = \sin(\cos x)$ b) $f(x) = \cos(\sin x)$
c) $f(x) = \arcsin(\cos(\arcsin x))$ d) $f(x) = \left(\frac{1-x^p}{1-x^q}\right)^m$

9.1.8

Berechnen Sie:

a) $\cos^2(\sin^2(\tan^2(x^2)))'$ b) $(x \cos x^2 + x^2 \sin x)'$
c) $\left(\frac{\cos(x^2+x)}{3x^2 \sin x}\right)'$ d) $\left(\frac{\cos(x^3)}{\sin(x^3)}\right)'$

9.1.9

Berechnen Sie:

a) $(\ln(\arctan(x)))'$ b) $(\arcsin(1-x^2))'$
c) $(\arctan(e^x))'$ d) $(\ln(\ln(1-e^x)))'$

9.1.10

Bilden Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f^k(x^2)$ b) $\left(\frac{1}{1-x^p}\right)^m$ c) $\sqrt{x^2+1} - x$ d) $f(\sqrt{1+x^2})$ e) $\frac{1}{\sin x}$

Hinweis: $f^k(x^2)$ bedeutet k - fache Hintereinanderausführung der Funktion f .

9.1.11

Differenzieren Sie:

- a) $x^5(\sin x + \tan x)$ b) $(x^2 - 1) \cot x + \frac{\tan x}{x^2+1}$
 c) $\sin \cos^2 \sin^3 \cos^2 \sin x$ d) $\arcsin x^2$ e) $\frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right)$

9.1.12

Differenzieren Sie:

- a) $\frac{1}{\sqrt{(a-bx)(a+bx)}} \arcsin\left(\frac{a \cos x + b}{a + b \cos x}\right)$ b) $\ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$
 c) $\frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right)$ d) $f(\sqrt{1+x^2})$ e) $(f(x^2))^k$

9.1.13

Differenzieren Sie die Funktionen:

- a) $x^2 \sin x + 2x \cos 3x - 2 \sin x$ b) $\cos^5 3x$ c) $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ d) $\frac{1}{\ln x}$ e) x^x

9.1.14Bestimmen Sie die Tangente an die Kurve $(x, f(x))$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$:

- a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $x_0 = \frac{1}{2}$ b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \leq 1 \\ x^2 - 1.5x & x \geq 1 \end{cases}$ $x_0 = 1$

9.1.15Berechnen Sie $f''(x)$:

- a) $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$ b) $f(x) = \arccos x^3 \arctan(1+x^2)$

9.1.16Berechnen Sie die n -ten Ableitungen:

- a) $f(x) = (x^2 + 1) \sin 2x$
 b) $f(x) = x^3 \sin bx$
 c) $f(x) = x^{-k}$ $k \in \mathbb{N}$

9.1.17Berechnen Sie die n -ten Ableitungen von $\frac{1-x}{1+x}$ und $\cos(ax)$.

9.1.18

Beweisen Sie:

- a) $2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \quad x > 1$
b) $2 \arctan x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0, \quad |x| < 1.$

Hinweis: Differenzieren Sie die Gleichungen. Warum muss man beide Fälle unterscheiden?

9.1.19

Durch $P_n := \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$ sind die Legendre Polynome definiert.

- a) Berechnen Sie P_1, P_2 und P_3 .
b) Zeigen Sie: P_n erfüllt die Gleichung $(1 - x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$

Hinweis: Setzen Sie $u = (x^2 - 1)^n$ und zeigen Sie $(x^2 - 1)u' - 2nxu = 0$. Differenzieren Sie diese Relation $(n+1)$ -mal und zeigen Sie so, dass $u^{(n)}$ obige Gleichung erfüllt.

9.2 Differenzierbarkeit, stetige Differenzierbarkeit

9.2.1

- a) Zeigen Sie $f : x \mapsto \sqrt{x^3} \cos \frac{1}{x}$ ist auf $[0, 1)$ differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar.
b) Ist die Funktion $f : x \rightarrow \sqrt{|x|} \cos \frac{1}{x}$ auf $(-1, 1)$ stetig, differenzierbar oder stetig differenzierbar?

9.2.2

Für welche reellen x ist die Funktion $f(x) = \tan(\operatorname{arsinh} \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2})$ sinnvoll? Bilden Sie $f'(0)$. Für welche x ist f stetig differenzierbar?

9.3 Fehlerrechnung

9.3.1

Es sei ein Dreieck gegeben mit $a = 60, c = 100, \alpha = 30^\circ$. Nehmen Sie an, dass α einen Fehler von 2% hat. Wie groß ist der relative Fehler des Flächeninhaltes der flächenkleineren Lösung ?

9.3.2

Wie groß ist der Halbmesser einer Stahlkugel (Dichte 7.82 g/cm^3), die 1.278 g wiegt und wie genau kann er angegeben werden, wenn bei der Wägung ein Fehler von 1 mg möglich ist ?

9.3.3

Jemand wirft einen Stein in einen Brunnen und misst die Fallzeit des Steines mit 2.4 sec . Die Bestimmung der Zeit sei auf 0.1 sec genau. Wie tief ist der Brunnen und wie genau kann seine Tiefe bestimmt werden? Die Gravitationskonstante werde dabei als $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ angenommen.

9.3.4

Der Widerstand R eines Schwingkreises mit der Kapazität $C = 20$ und Induktivität $L = 5$ ist zu bestimmen. Dazu wird die Kreisfrequenz ω gemessen, und zwar $\omega = 7$ mit einer Genauigkeit von 1% . Wie groß ist $R = \pm \frac{1}{\omega C - 1/(\omega L)}$ und die erzielte Genauigkeit?

9.3.5

Wie stark ändert sich in erster Näherung (lineare Approximation) die Fläche eines Kreises, wenn sein Radius R um ΔR vergrößert wird? (Skizze)

9.3.6

Die Bewegung eines Geschosses, das vom Punkt $(0, 0)$ mit vorgegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α abgeschossen wird, kann durch folgende Parabelgleichung beschrieben werden: $y(x) = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$, $g =$ Gravitationskonstante.

Aus der Gleichung folgt, dass man ein Ziel $(x_0, 0)$ entlang zweier Bahnen erreichen kann und zwar mit den Winkeln α_0 und $\frac{\pi}{2} - \alpha_0$. Berechnen Sie aus obiger Gleichung die Reichweite und den Winkel α_0 . Untersuchen Sie für welchen der beiden Winkel der Zielpunkt $(x_0, 0)$ empfindlicher auf Ungenauigkeiten in der Einstellung des Winkels reagiert (relativ und absolut).

9.3.7

Bei der Auswertung der Funktion $f(x)$ (auf einem Computer) an der Stelle x tritt ein relativer Datenfehler $\frac{|\Delta x_0|}{|x_0|} \leq 10^{-8}$ auf. Wie groß ist der maximale Fehler des

berechneten Funktionswertes (absolut und relativ)?

$$f(x) = e^{3x} \sin x \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{16}$$

9.4 Monotonie, Mittelwertsatz

9.4.1

Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad \forall x > 0$$

9.4.2

Untersuchen Sie die Monotonie folgender Funktionen:

a) $f(x) = e^{-x^2+5x-1}$ b) $f(x) = 3 \sin^2 x - 5 \sin x - 1$

9.4.3

Zeigen Sie, dass die Gleichung $\frac{\arctan y - 1}{y - \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1+x^2}$ für jedes $y \in (0, \frac{\pi}{4})$ eine Lösung $x \in (y, \frac{\pi}{4})$ hat.

Hinweis: Wenden Sie den Mittelwertsatz auf eine geeignete Funktion an.

9.4.4

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes: $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad x > 0$.
b) Gegeben sei $f(x) = x^3 - 3x + 4$. Bestimmen Sie für $a = 1, b = 2$ ein $\zeta \in (a, b)$, sodass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\zeta)$ gilt.

9.4.5

Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = \arctan \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ für $x > 1$ monoton fallend ist.

9.4.6

Berechnen Sie eine Lipschitzkonstante für $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

9.4.7

Bestimmen Sie zu den Funktionen $f(x) = \frac{x^5}{3} - \frac{x^3}{3} - 6x + 1$, $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$ jene Intervalle, auf denen sie monoton sind. Bestimmen Sie möglichst große Intervalle, auf denen die Funktionen Lipschitz-stetig sind.

9.5 Unbestimme Ausdrücke

9.5.1

Berechnen Sie mittels der Regel von de l'Hospital:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^3}}{x^3} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1/x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1/\sqrt{x}} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln \frac{1}{x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x & \end{array}$$

9.5.2

Berechnen Sie mittels der Regel von de l'Hospital $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ mit

$$\text{a) } x_0 = 0 \quad f(x) = \frac{\tan 2x}{\tan 3x}, \quad \text{b) } x_0 = 0 \quad f(x) = \frac{\sinh x - \sin x}{\sinh 2x - \sin 2x}$$

9.5.3

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ mit

$$\text{a) } x_0 = 0 \quad f(x) = \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \quad \text{b) } x_0 = 0 \quad f(x) = (x \cot x)^{1/x^2}$$

9.5.4

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ mit

$$\text{a) } x_0 = 0 \quad f(x) = \frac{\ln \cos 3x}{\ln \cos 2x} \quad \text{b) } x_0 = \infty \quad f(x) = x - \sqrt[k]{x^k + 1} \quad k > 1$$

9.5.5

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ mit

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x_0 = 0 & f(x) = (\cot x)^x \\ \text{c) } x_0 = \frac{\pi}{2} & f(x) = (\sin x - \cos x)^{\tan x} \end{array} \quad \text{b) } x_0 = \frac{\pi}{2} \quad f(x) = (1 - \sin x) \tan x$$

9.5.6

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ mittels der Regel von de l'Hospital:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{1}{x^2} - \cot^2 x & \text{b) } f(x) = (1 - e^{2x}) \cot 2x \\ \text{c) } f(x) = \sin x^{\tan x} & \text{d) } f(x) = \frac{x(\cos x - \cosh x)}{\sin x - \sinh x} \end{array}$$

9.5.7 – 9.5.10 Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

9.5.7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{kx + \ln(1 + \sqrt{1-x^2}) - \log 2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{e^x - x - 1} \right)$$

9.5.8

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{a+b/(\pi-2x)} \quad \lim_{x \rightarrow a} (e^a - e^x) \tan \frac{\pi x}{2a}$$

9.5.9

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(\cos x) \cot x) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x^{1/\ln(e^x-1)}$$

9.5.10

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (a + be^{\tan x})^{\pi-2x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{\frac{2a}{x}} \right)^x$$

9.5.11

Berechnen Sie mit der Regel von de l'Hospital:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x + x)^{e^{-x}}$$

10 Lokales und globales Verhalten von Funktionen

10.1 Die Größenordnung von Funktionen

10.1.1

Beweisen Sie:

$$\begin{aligned} \text{a) } & (e^x - e^{\pi/2}) \cos x = O\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \text{b) } & \sqrt{x} \sin(x^2) = o(x^\alpha) \quad x \rightarrow 0 \quad \text{wobei } 0 \leq \alpha < \frac{5}{2} \\ \text{c) } & \ln(\ln x) = o(\ln x) \quad x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

10.1.2

Zeigen Sie: $f(x) = O(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$.

$$\begin{aligned} \text{a) } & f(x) = \frac{x^3+2x}{x^5+6x^3+7} \quad g(x) = \frac{1}{x^2} \quad x_0 = \infty \\ \text{b) } & f(x) = 1 - x^2 \quad g(x) = \cos x \quad x_0 = 0 \end{aligned}$$

10.1.3

Bestimmen Sie k derart, dass:

a) $\sqrt{2x^2 - 1} = kx + O(1)$ für $x \rightarrow \infty$

b) $(1 - (\frac{v}{c})^2)^{-1/2} = 1 + k(\frac{v}{c})^2 + O((\frac{v}{c})^4)$ für $\frac{v}{c} \rightarrow 0$

10.1.4

Zeigen Sie:

$$\int_2^e e^{-xt} \log x dx = \frac{\ln 2}{te^{2t}} + O\left(\frac{1}{te^{2t}}\right) \text{ für } t \rightarrow \infty$$

10.1.5

Zeigen Sie:

$$\frac{e^{-t\pi}}{1+t^2} = \frac{e^{-t\pi}}{t^2} + O\left(\frac{e^{-t\pi}}{t^3}\right) \text{ für } t \rightarrow \infty$$

10.2 Extremwertaufgaben

10.2.1

Durch einen Gang mit $2m$ Breite soll von zwei Leuten eine Leiter getragen werden. Die beiden kommen an eine Ecke. Wie lang darf die Leiter höchstens sein, dass die beiden die Leiter um die Ecke tragen können?

10.2.2

Eine rotationssymmetrische Schwimmboje werde aus einem Zylinder hergestellt, dem an jedem Ende zwei Kegel aufgesetzt werden. Die Höhe der Kegel sei $\frac{3}{4}$ des Radius der Kegel. Das Volumen betrage 90π . Bestimmen Sie den Radius und die Höhe des Zylinders so, dass die Oberfläche minimal ist.

10.2.3

Einem Halbkreis mit Radius r soll ein Rechteck mit größtmöglichem Flächeninhalt eingeschrieben werden. Wie lauten die Abmessungen des Rechtecks und wie groß kann der Flächeninhalt maximal werden?

10.3 Kurvendiskussion

10.3.1

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-x}(1 - \frac{1}{x})$. Bestimmen Sie die Extrema, deren Charakter und untersuchen Sie, ob Wendepunkte auftreten. Bestimmen Sie die Asymptoten und das lokale Verhalten von f an den Stellen $x = 0$, $x = \pm\infty$. Zeichnen Sie den Graphen.

10.3.2

Berechnen Sie Extrema (relative, absolute) und Wendepunkte von $f(x) = x^2e^x$ im Intervall $[-10, 10]$.

10.3.3

Bestimmen Sie für die Funktionen $f(x)$ stationäre Punkte, deren Charakter, Wendepunkte, sowie waagrechte und senkrechte Asymptoten:

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+2}$ b) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ c) $f(x) = \frac{x^2+5}{x-2}$

10.3.4

Finden Sie alle Extremwerte der Funktion $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$. Fertigen Sie eine Skizze des Funktionsgraphen an, und stellen Sie fest, welchen Charakter die Extrema haben.

10.3.5

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2e^{-x}$. Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich und finden Sie die Nullstellen, Extrema, und Wendepunkte. Bestimmen Sie außerdem den Charakter der Extrema und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$. Zeichnen Sie den Graphen!

10.3.6

Gegeben sei die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{x^3+4x^2+4x}{x^2+3x}$. Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich und bestimmen Sie die Art der Unstetigkeitsstellen. Finden Sie die Nullstellen und untersuchen Sie den Charakter der Extrema. Untersuchen Sie außerdem das Verhalten der Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$ und stellen Sie die Geradengleichung der Asymptoten auf. Zeichnen Sie den Graphen!

11 Iterationsverfahren

11.1 Newtonverfahren

11.1.1

Zeigen Sie, dass die Gleichung $\ln x - 2x + 3 = 0$ im Intervall $[1, 2]$ mindestens eine Lösung hat. Berechnen Sie je drei Schritte des Newtonverfahrens mit den Startwerten $x_0 = 1.1$, $x_0 = 1.8$.

11.1.2

Die Gleichung $x^3 + \frac{1}{4} = x$ hat im Intervall $(0, \frac{1}{2})$ bzw. $(\frac{1}{2}, 1)$ jeweils genau eine Lösung (Begründung!). Versuchen Sie diese Lösung mit dem Newtonverfahren zu berechnen. $x_0 = 1$, $x_0 = -5$. Erklären Sie das Resultat anhand einer Skizze.

11.1.3

Lösen Sie $x \ln x = 1$ mittels des Newtonverfahrens. Wählen Sie einen geeigneten Startwert und bestimmen Sie x auf Taschenrechnergenauigkeit.

11.1.4

Berechnen Sie $\sqrt[3]{7}$ nach dem Newtonschen Verfahren auf vier Dezimalen, ausgehend vom Näherungswert $x_0 = 2$. Ist die Konvergenz von diesem Punkt aus gesichert? (Stellen Sie heuristische Überlegungen an). Verifizieren Sie die quadratische Konvergenz d.h. dass die Anzahl der richtigen Stellen sich von Schritt zu Schritt verdoppelt.

11.1.5

Transformieren Sie das Nullstellenproblem $e^{x-2} - x = 0$ auf ein geeignetes äquivalentes Fixpunktproblem und bestimmen Sie x durch Fixpunktiteration auf vier Stellen genau!

12 Das Riemannsche Integral

12.1 Integralrechnung

12.1.1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int \cos x$ b) $\int \cos^4 x \sin x$ c) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}$

12.1.2

Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $\int_a^2 |2x - x^2| dx = 8$?

12.1.3

Berechnen Sie $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}$, indem Sie

- a) die Stammfunktion $\int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}$ durch Substitution berechnen und den Hauptsatz der Integralrechnung anwenden,
b) auch die Grenzen substituieren.

12.1.4

Bestimmen Sie die Lösung folgender bestimmter Integrale:

a) $\int_0^1 (2x + 6x^2 - 8x^3) dx$

b) $\int_0^1 \left(\frac{3}{2} \sqrt{x} + \frac{6}{5} \sqrt[5]{x} + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

c) $\int_0^\pi (\cos x - \sin x) dx$

d) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

12.1.5

Finden Sie den Fehler in folgender Rechnung:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left| \begin{array}{l} \cos y = x \\ -\sin y dy = dx \\ y = \arccos x \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \sin t = x \\ \cos t dt = dx \\ t = \arcsin x \end{array} \right|$$

$$\int \frac{-\sin y dy}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \int \frac{\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$-\int \frac{\sin y dy}{\sin y} = \int \frac{\cos t dt}{\cos t}$$

$$-\int dy = \int dt$$

$$-y = t$$

$$-\arccos x = \arcsin x \quad \forall x \in (0, 1)$$

12.1.6 – 12.1.8 Berechnen Sie folgende Integrale:

12.1.6

$$\int \cot x dx$$

12.1.7

$$\int \cos^4 x dx$$

12.1.8

$$\int \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{1+e^{-2x^2}}} dx$$

12.1.9

Berechnen Sie mittels partieller Integration:

a) $\int e^{ax} \sin(bx) dx$ b) $\int e^{ax} \cos(bx) dx$

12.1.10

Berechnen Sie mittels partieller Integration:

a) $\int_0^1 a^{-3x^4} x^3 dx$ $a > 0$ b) $\int e^{-5x^6} x^1 dx$

12.1.11

Berechnen Sie mittels partieller Integration:

a) $\int x e^x dx$, b) $\int \cos^2 x dx$

12.1.12 – 12.1.17 Berechnen Sie folgende Integrale:**12.1.12**

$$\int e^x(x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 1)dx$$

12.1.13

$$\int(\tan^3 x + \tan x)dx$$

12.1.14

$$\int_c^t \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

12.1.15

$$\int(\arcsin x)^2 dx$$

12.1.16

$$\int \arcsin x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

12.1.17

$$\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx$$

Hinweis: $x = \sin u$, sowie partielle Integration nach dem zweiten Faktor in $u(\sin u \cos^2 u)$.

12.1.18

Berechnen Sie $\int f(x)dx$ für $f(x) = x^2 e^{2x} \cos x$ und $f(x) = \sinh(-3x) \cos(-2x)$.

12.1.19

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x \ln x}$ und $\int \frac{dx}{(1-\sinh ax)}$.

12.1.20

Berechnen Sie $-\int_{-1}^x \frac{1}{y^2+2y} dy$ und zeigen Sie: $\operatorname{artanh}(x+1) = \ln\left(-\frac{x+2}{x}\right)$ für $-2 < x < 0$.

12.1.21

Ist es möglich im Integral $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ als neue Variable $y = \frac{1}{x}$ einzuführen?

12.1.22 – 12.1.26 Bestimmen Sie die Stammfunktionen:**12.1.22**

$$\int e^x \cos x dx$$

12.1.23

- a) $\int \arctan x dx$ ($u = \arctan x, v' = 1$)
- b) $\int \ln x dx$
- c) $\int \arcsin x dx$

12.1.24

$$\int x \ln x dx$$

12.1.25

$$\int \cos^5 x \sin x dx$$

12.1.26

$$\int x^4(1+x^5)^5 dx$$

12.1.27

Leiten Sie eine Rekursionsformel für das Integral $\int x^n e^x \sin x dx$ her.

12.1.28

Leiten Sie für $J_n(x) = \int \cos^n x dx$ die folgende Rekursionsformel her:

$$J_n(x) = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} J_{n-2}(x) \quad n \geq 2$$

12.1.29 – 12.1.35 Berechnen Sie die Integrale:**12.1.29**

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6} dx \quad x = 2 \text{ ist eine Nullstelle des Nenners}$$

12.1.30

$$\int \frac{dx}{1-x^4}$$

12.1.31

$$\text{a) } \int \frac{dx}{1+x^3} \quad \text{b) } \int \frac{dx}{x^3(1+x^2)}$$

12.1.32

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 6x}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2} dx \quad x = -1 \text{ ist eine doppelte Nullstelle des Nenners}$$

12.1.33

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)(x-2)(x^2-x+1)}$$

12.1.34

$$\int \frac{dx}{x^8 - x^7 - x^4 + x^3}$$

12.1.35

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 5}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2} dx \quad x = 1 \text{ ist eine doppelte Nullstelle des Nenners}$$

12.1.36 - 12.1.50 Bestimmen Sie die Stammfunktionen:**12.1.36**

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 5x + 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2} dx, \quad x = 1 \text{ ist eine doppelte Nullstelle des Nenners}$$

12.1.37

$$\int \frac{2x^3+2x^2+3x}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1} dx \quad x = -1 \text{ ist eine doppelte Nullstelle des Nenners}$$

12.1.38

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+3\ln x}}{x} dx$$

12.1.39

$$\int a^{\sqrt[3]{x}} dx \quad \text{Substitution: } t = \sqrt[3]{x}, \text{ dann partiell integrieren.}$$

12.1.40

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} \quad \text{Substitution: } t = \sqrt{1+e^x}$$

12.1.41

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

12.1.42

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$$

12.1.43

$$\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}} dx$$

12.1.44

$$\int \frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx$$

12.1.45

$$\int \frac{\sinh^2 x + 2 \cosh x}{\cosh^3 x} dx$$

12.1.46

$$\int \frac{\sin^3 x + 4 \cos^2 x + 4 \cos x}{\sin^4 x} dx$$

12.1.47

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+3t^2+3t^4+t^6} + \sqrt[5]{(1+t^2)^5+4t^3}}{t^7} dt$$

12.1.48

$$\int \left(\sqrt{\frac{x-3}{x-5}} + \sqrt[4]{\frac{x-3}{x-5}} \right) x dx$$

12.1.49

$$\int \left(\sqrt{\frac{2x-3}{6x-9}} + \sqrt[4]{\frac{8x-12}{4x+6}} \right) x dx$$

12.1.50

$$\int (\cosh ax + \sinh ax) \sin e^{ax} dx$$

12.1.51

Berechnen Sie die Fläche, die von der Kurve und der x -Achse begrenzt wird (Skizze):

a) $y = \sin x \sin 2x \quad 0 \leq x \leq 2\pi$ b) $y = |x - [x] - \frac{1}{2}| \quad 0 \leq x \leq 5$

12.2 Uneigentliche Integrale

12.2.1 – 12.2.2 Untersuchen Sie die nachstehenden Integrale auf Konvergenz (nicht berechnen):

12.2.1

a) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$

12.2.2

a) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ b) $\int_1^\infty \frac{e^{-\lambda x} dx}{(\log x)^k} \quad \lambda > 0, k > 1,$

Hinweis: $\log(1+t) < t$ für $t > 0$ (siehe Beispiel 9.4.1)

12.2.3

Stellen Sie fest, ob $\int_a^b f(x) dx$ als uneigentliches Integral existiert. Falls dies zutrifft, berechnen Sie seinen Wert. Falls nicht, ermitteln Sie den Hauptwert $\int_a^b f(x) dx$, falls er existiert:

a) $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$ b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+5x+6}$

c) $\int_c^b \frac{dx}{x^2-5x+6}$ d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-1}$

12.2.4

Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale:

$$\text{a) } \int_1^\infty \frac{x^2-3}{x^3(1+x^2)} dx \quad \text{b) } \int_{-1}^0 \ln(-x) dx \quad \text{c) } \int_a^b \frac{dx}{(x-a)(b-x)}$$

12.2.5

Stellen Sie fest, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie ihren Cauchyschen Hauptwert falls möglich:

$$\text{a) } \int_{-2}^3 \frac{x^2+2}{x} dx \quad \text{b) } \int_{-\infty}^\infty \frac{x^3}{x^2+4} dx \quad \text{c) } \int_0^\pi \frac{dx}{\cos x}$$

12.2.6

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale wenn sie existieren, sonst ihren Cauchy'schen Hauptwert:

$$\text{a) } \int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx \quad \text{b) } \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-1}$$

12.2.7

Überprüfen Sie die Existenz der uneigentlichen Integrale:

$$\text{a) } \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1} dx \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x \sin x}}$$

12.2.8

Überprüfen Sie, für welche $a, b \in \mathbb{R}$ die folgenden Integrale konvergieren:

$$\text{a) } \int_0^\infty t^a e^{bt} dt \quad \text{b) } \int_0^\infty \frac{t^a}{1+t^b} dt$$

12.2.9

Sofern $\int_a^b f(x) dx$ existiert, berechnen Sie seinen Wert:

$$\text{a) } \int_0^\infty \frac{dx}{(ax+b)^n} \quad a > 0 \quad b > 0, \quad n > 1 \quad \text{b) } \int_1^\infty \frac{(3x^2+1)x}{(x^2+1)^{7/2}} dx$$

13 Funktionenfolgen und Funktionenreihen

13.1 Konvergenz

13.1.1 – 13.1.4 Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ absolut konvergent? Benutzen Sie die Konvergenzkriterien für Reihen. Skizzieren Sie den Konvergenzbe-
reich.

13.1.1

$$f_n(z) = \frac{nz}{1+z^2}$$

13.1.2

$$f_n(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$$

13.1.3

$$f_n(z) = \frac{z^n+1}{z^n-1}$$

13.1.4

$$f_n(z) = \left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^n$$

13.1.5

Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}$ $x \geq 0$.

13.1.6

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{2k}+(k+1)x}}$ im Intervall $0 \leq x < \infty$ gleichmäßig konvergiert ist. Geben Sie ein n an, so dass für den Reihenrest gilt: $|R_n(x)| < \frac{1}{100}$.

13.1.7

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^k}$ für $0 < x < 1$ nicht gleichmäßig konvergiert, aber für $x \geq 1$ gleichmäßig konvergiert.

13.1.8

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sin x)^n$$

13.1.9

Konvergiert die Funktionenfolge $f_n(x) = 1 - x^n$ für $x \in [0, 1]$ punktweise? Wenn ja, konvergiert sie gleichmäßig?

14 Potenzreihen

14.1 Konvergenzradius, Grenzfunktion

14.1.1

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe und berechnen Sie die Summe:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)}$

14.1.2

Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{a^{n^2}}$ $a > 1$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3 x^n}{(3n)!}$

14.1.3

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für

a) $a_n = \delta^{n^2}$ $0 < \delta < 1$ b) $a_n = \frac{n!}{n^n}$ c) $a_n = \frac{n}{a^{n^2}}$ $a > 1$
d) $a_n = \frac{(n!)^3}{3n}$ e) $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ f) $a_n = \sqrt[n]{a} - 1$ $a > 0$

14.1.4

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für

a) $a_n = \frac{n!}{n^n}$ b) $a_n = \frac{n+1}{n^2} (-1)^n$ c) $a_n = \frac{n^3 - n + 5}{n^2 + 4}$

14.1.5

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ für

a) $a_n = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$ b) $a_n = \sqrt{a} - 1 - \frac{1}{n}$

14.1.6

Untersuchen Sie, für welche reellen z die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert und geben Sie eine Summenfunktion an:

a) $a_n = n$ b) $a_n = n^2 2^n$ c) $a_n = n^{-2}$

14.1.7

Berechnen Sie $\sqrt{7}$ näherungsweise durch Entwicklung in eine binomische Reihe.

14.2 Taylorreihen, Taylorpolnome

14.2.1

Bestimmen Sie die Taylorreihe mit Anschlussstelle $x_0 = 0$ der Funktion:

a) $f(x) = (2 + 3x)^{3/4}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$

Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler bei Verwendung des Taylorpolynoms 3. Ordnung statt $f(x)$ auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ an.

14.2.2, 14.2.3: Leiten Sie aus der Potenzreihe $\frac{1}{1-z} = \sum_{v=0}^{\infty} z^v$, $|z| < 1$ die Taylorreihe von $f(z)$ mit Anschlussstelle z_0 her. Bestimmen Sie weiters das Konvergenzgebiet.

14.2.2

a) $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ $z_0 = 0$ b) $f(z) = \frac{z}{1-z}$, $z_0 = 0$
c) $f(z) = \frac{1}{1-2z}$, $z_0 = 0$ d) $f(z) = \frac{1}{2-z}$, $z_0 = 0$

14.2.3

a) $f(z) = \frac{1}{z}$ $z_0 = 1$ b) $f(z) = \frac{1}{3+z}$ $z_0 = -1$
c) $f(z) = \frac{1}{(z^2+5z+6)}$, $z_0 = 0$ d) $f(z) = \frac{3z+1}{4z-1}$, $z_0 = 2$

14.2.4

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2$ und geben Sie R_2 an:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $x_0 = 0$ b) $f(x) = \cos(x^2)$ $x_0 = \frac{\pi}{2}$

14.2.5

Leiten Sie aus den bekannten Taylorreihen elementarer Funktionen die Taylorreihe der folgenden Funktionen her. Bestimmen Sie weiters den Konvergenzradius.

a) $f(x) = \cos x$ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ b) $f(x) = e^{x^2+3}$ $x_0 = 0$ c) $f(x) = \log(3+5x)$ $x_0 = 0$

14.2.6

Entwickeln Sie nach Potenzen von x :

a) $f(x) = \sin(a+x)$ b) $f(x) = (1 + e^{2x})^3$

14.2.7

Wieviele Glieder der Taylorreihe von $f(x) = \ln(1+x)$ um $x_0 = 0$ müssen ausgewertet werden, damit f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ bis auf einen Fehler von 1% approximiert wird?

14.2.8

Geben Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x)$ mit Anschlussstelle x_0 , ihr allgemeines Glied (das a_n in der jeweiligen Entwicklung nach Potenzen von $x - x_0$), sowie den Konvergenzradius an:

- a) $f(x) = \frac{1}{(1+2x^2)}$ $x_0 = 0$ b) $f(x) = \ln(2+4x)$ $x_0 = 1$
c) $f(x) = \frac{2}{(x+1)(x+2)}$ $x_0 = 1$

Hinweis: Partialbruchzerlegung und geometrische Reihe

14.2.9

Unter Verwendung der binomischen Reihe $(1+x)^\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, $|x| < 1$, leiten Sie eine Entwicklung von $f(\frac{v}{c})$ nach Potenzen von $\frac{v}{c}$ her. Für welche $\frac{v}{c}$ konvergiert die Entwicklung?

- a) $f(\frac{v}{c}) = (1 - (\frac{v}{c})^2)^{1/2}$ b) $f(\frac{v}{c}) = (1 - (\frac{v}{c})^2)^{-1/2}$

Geben Sie auch die ersten vier Glieder der Reihenentwicklung in b) an.

14.2.10

Wie in 14.2.8.

- a) $f(x) = \sin(x^3)$ $x_0 = 0$ b) $f(x) = \sin^3 x$ $x_0 = 0$

14.2.11

Bestimmen Sie $f^{(128)}(0)$ (128. Ableitung an der Stelle 0):

- a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+4x^2}}$ b) $f(x) = \frac{5x}{(x^2+4)}$

14.2.12

Ermitteln Sie mittels Cauchyprodukt die ersten vier Glieder der Taylorreihe von $f(x) = e^{2x} \sin 3x$, $x_0 = 0$. Überprüfen Sie a_3 durch Differenzieren und schreiben Sie das Taylorpolynom P_2 an. Geben Sie ebenso das Restglied in beiden Darstellungen an.

14.2.13

Berechne Sie das allgemeine Glied der Taylorreihe für $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ mit der Anschlussstelle $x_0 = 0$.

14.2.14

Bestimme Sie mittels der Reihenentwicklung von $y = e^x$ bzw. $y = \sin x$ die ersten vier Glieder der Entwicklung der Funktion $y = e^{\sin x}$ nach Potenzen von x .

14.2.15

Entwickeln Sie $f(x) = x \sin 3x$ nach Potenzen von $x + \frac{\pi}{3}$ und geben Sie das Restglied an.

A Die komplexen Zahlen

A.1 Die Gauß'sche Zahlenebene

A.1.1

Skizzieren Sie in der Ebene die nachstehenden Mengen komplexer Zahlen:

$$A := \{z \mid |3z - 1| < 1\} \quad B := \{z \mid -2 < \operatorname{Re}(2z + 3) \leq 1\}$$

A.1.2

Geben Sie eine geometrische Beschreibung in der Zahlenebene aller $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

- a) $|z| = r > 0$ b) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$
c) $|z| + \operatorname{Re}(z) \leq 1$ d) $|z - z_1| + |z - z_2| = c$ wobei $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $c > |z_1 - z_2|$

A.1.3

Stellen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen graphisch dar:

$$\operatorname{Re}(iz) \leq -1 \quad (z-2)\overline{(z-2)} \geq 1 \quad \left|z - \frac{1}{2}\right| + \left|z + \frac{1}{2}\right| \leq 2$$

A.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

A.2.1

Gegeben seien die folgenden komplexen Zahlen:

$$w = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \quad x = 3 + 4i \quad y = 4 + 3i \quad z = 1 + \sqrt{2}i$$

a) Berechnen Sie mit diesen Zahlen folgende Ausdrücke:

$$x + y \quad w - z \quad \frac{x}{y} \quad \frac{y}{x} \quad y + iw \quad \bar{z} - x \quad \frac{xz}{w - \bar{y}}$$

Berechnen Sie aus den Ergebnissen von $\frac{x}{y}$ und $\frac{y}{x}$ den Ausdruck: $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}$

b) Bestimmen Sie die Polarform von w, x, y und z . Berechnen Sie damit $xyz, \frac{y}{z}, \frac{w}{x}, \frac{1}{x}, wz, x^5, z^8$

c) Berechnen Sie den Betrag der Zahlen.

A.2.2

Berechnen Sie die komplexen Lösungen z_1, z_2 der quadratischen Gleichung $x^2 + 2x + 4 = 0$. Stellen Sie die Lösung in Polarform dar. Berechnen Sie den Ausdruck: $(z - z_1)(z - z_2)$.

A.2.3

Gegeben sind die komplexen Zahlen $u = 3 - i, v = 2 + i$. Berechnen Sie:

$$\operatorname{Re}(u^2 - v^2) + \operatorname{Im}\left(\frac{uv}{u-iv}\right)$$

A.2.4

a) Schreiben Sie die dritten Wurzeln von $4(1 + i\sqrt{3})$ in der Form $a + ib$.

b) Berechnen Sie die Quadratwurzeln von $-7 + 24i$.

A.2.5

Berechnen Sie die 6-ten Wurzeln von -64 und stellen Sie sie graphisch dar.

Teil II: Lösungen und Hinweise

1 Einführung - Lösungen und Hinweise

1.1 Aussagenlogik

1.1.1

1.1.2

1.1.3

Hinweis: Ordnen Sie den Eigenschaften des Urlaubsortes Variablen zu, Am Meer A, in den Bergen B ..., und vereinfachen Sie die Aussage durch Umformen.

1.2 Vollständige Induktion

1.2.1

$$n^2$$

1.2.2

Hinweis: Vgl. Vorlesungsbeispiel $2^n > n^3$

1.2.3

1.2.4

1.2.5

1.2.6

1.2.7

Hinweis: Beachten Sie, dass in der Formel die Zahl 2 jeweils mit n bzw. n+1 exponentiert und nicht multipliziert wird.

1.2.8

1.2.9

1.2.10

1.2.11

Hinweis: Verwenden Sie das Additionstheorem für Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad n, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$$

1.2.12

Hinweis: Leiten Sie aus der Anzahl der möglichen Diagonalen $D(n)$, die von jedem Eckpunkt starten können (unter Beachtung der Redundanzen), die Gesamtanzahl ab. Betrachten Sie die neu entstehenden Diagonalen ($D(n+1) - D(n)$) bei Hinzufügen eines Punktes zu einem bestehenden n -Eck und entwickeln Sie daraus eine Rekursionsbeziehung. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die Richtigkeit der gefundenen Lösung.

1.2.13

1.2.14

Hinweis: Multiplizieren Sie die Ungleichung mit $(2n+1)(2n+2)$.

1.3 Rekursive Definition

1.3.1

1.3.2

1.3.3

Hinweis: Zweistufige Rekursion

Induktionsvoraussetzung:

$$u_{n-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}, \quad u_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

1.4 Geometrische Summenformel und Binomialkoeffizient

1.4.1

1.4.2

a) $\sum_{i=0}^{10} 2^i = 2047$

b) $\sum_{i=6}^{12} 3^{-i} = \frac{1093}{531441}$

c) **Hinweis:** $(1-x)(1+x) = 1-x^2$, Bsp.1.4.1.

1.4.3

k

1.4.4

a) -2099520

b) $54a^6b^2 + 180a^5b^2 + 150a^4b^2$ **Hinweis:** $a^2x + 5by + 3aby = a^2x + (5b + 3ab)y$

1.4.5

b) $(-1)^n$

c) 2^n

d) 0

1.4.6

a) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$ **Hinweis:** Definition der Binomialkoeffizienten, Bsp.1.2.11

b) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

1.4.7

11085360, **Hinweis:** $(a-b-c)^n = (a-(b+c))^n$

1.4.8

2 Grundlagen der Mengenlehre - Lösungen und Hinweise

2.1 Mengenoperationen

2.1.1

Hinweis: $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

2.1.2

2.1.3

a) wahr b) falsch c) falsch d) falsch

Hinweis: $A - B$ ist eine andere Schreibweise für $A \setminus B$

2.1.4

2.1.5

2.1.6

2.1.7

2.1.8

2.1.9

a) falsch b) falsch c) falsch d) wahr

Hinweis: Um eine (allgemeine) Aussage zu widerlegen reicht es ein (einziges) Gegenbeispiel zu bringen.

2.2 Abbildungen und Äquivalenz von Mengen

2.2.1

I ... injektiv, S ... surjektiv, B ... bijektiv

a) $\neg I, \neg S, \neg B$

- b) $\neg I, S, \neg B$
- c) $I, \neg S, \neg B$
- d) I, S, B
- e) $I, \neg S, \neg B$
- f) $\neg I, \neg S, \neg B$

2.2.2

- a) $I, \neg S, \neg B$
- b) $I, \neg S, \neg B$
- c) $I, S, B \quad x = \frac{y-1}{3}$
- d) $I, S, B \quad x = \frac{y-1}{3}$

2.2.3

- a) $I, \neg S, \neg B$
- b) $\neg I, \neg S, \neg B$

2.2.4

- a) **Hinweis:** $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- b) **Hinweis:** Vollständige Induktion. Betrachten Sie für den Induktionsschluss die Mächtigkeit der Potenzmenge $P(A)$

$$\begin{aligned} |A| = n + 1, A = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}, \quad B = \{x_1, \dots, x_n\}, |B| = n \\ A = B \cup \{x_{n+1}\}, \quad |P(B)| = 2^n \quad \Rightarrow \quad P(B) = \{p_1, \dots, p_{2^n}\} \end{aligned}$$

2.2.5

2.2.6

2.2.7

- a) abzählbar , b) abzählbar

2.2.8

3 Die reellen Zahlen - Lösungen und Hinweise

3.1 Der Betrag

3.1.1

Hinweis: Umformung unter Verwendung der Signum Funktion.

3.1.2

a) $\left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$ b) $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$

3.1.3

a) $\{-1, 1, 3\}$

b) das Intervall $(0, 4)$

3.1.4

a) $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ b) $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$

3.2 Mengen von reellen Zahlen

3.2.1

3.2.2

3.2.3

3.2.4

3.2.6*

3.2.7

3.2.8

4 Zahlenfolgen - Lösungen und Hinweise

4.1 Grenzwerte

4.1.1

- a) a_n ist streng monoton fallend.
- b) b_n ist streng monoton fallend.

4.1.2

4.1.3

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad N \geq 101,$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2, \quad N \geq 20,$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1, \quad N \geq 42.$

4.1.4

- a) **Hinweis:** Erweitern Sie mit einem geeigneten Faktor um den Ausdruck $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ als Bruch mit konstantem Zähler zu schreiben und führen Sie dann den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch.
- b) **Hinweis:** Beim Einschließungsprinzip (Satz 4.3.9) genügt es, dass die Ungleichung $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \geq N_0$ für ein geeignetes $N_0 \in \mathbb{N}$ gilt.

4.1.5

- a) $N = 104$
- b) $N = 5$

4.1.6

4.1.7

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$. **Hinweis:** Verwenden Sie $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$. **Hinweis:** Bsp.4.1.4 a)

4.1.8

4.1.9

Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe des Einschließungssatzes $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0$.

4.1.10

4.1.11

4.1.12

4.2 Rekursiv definierte Folgen

4.2.1

4.2.2

4.2.3

4.2.4

4.2.5

- a) **Hinweis:** Mögliche Grenzwerte sind Lösungen der Gleichung $a^2 - 3a + 2 = 0$
- b) **Hinweis:** Benutzen Sie $a_n > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} < \frac{1}{2}$
- d) **Hinweis:** Verwenden Sie die bisherigen Ergebnisse und den Hauptsatz über monotone Folgen.

4.2.6

- a) **Hinweis:** Mögliche Grenzwerte sind Lösungen der Gleichung $a^2 - a + \frac{1}{4} = 0$
- d) **Hinweis:** Verwenden Sie die bisherigen Ergebnisse und den Hauptsatz über monotone Folgen.

4.3 Uneigentliche Grenzwerte

4.3.1

4.4 Theoretische Beispiele

4.4.1

4.4.2

5 Reihen mit konstanten Gliedern - Lösungen und Hinweise

5.1 Grenzwerte

5.1.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{3}. \quad \textbf{Hinweis:} \text{ Teleskopreihe}$$

5.1.2

5.1.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{12}. \quad \textbf{Hinweis:} \text{ Teleskopreihe}$$

5.1.4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = 1/2 \quad \textbf{Hinweis:} \text{ Teleskopreihe}$$

5.1.5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)} = -1. \quad \textbf{Hinweis:} \text{ Teleskopreihe}$$

5.1.6

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

5.2 Konvergenz, Divergenz

5.2.1

- a) Die Reihe ist divergent.
- b) Die Reihe ist konvergent.

5.2.2

- a) Die Reihe ist absolut konvergent.
- b) Die Reihe ist absolut konvergent.

5.2.3

- a) Die Reihe ist absolut konvergent.
- b) Die Reihe ist divergent.

5.2.4

- a) Die Reihe ist divergent.
- b) Die Reihe ist divergent.

5.2.5

- a) Die Reihe ist divergent.
- b) Die Reihe ist absolut konvergent.

5.2.6

5.2.7

5.2.8

Reihe ist konvergent für $2\beta - \alpha > 1$, divergent für $2\beta - \alpha \leq 1$.

5.2.9

5.2.10

- a) Die Reihe ist absolut konvergent.
- b) Die Reihe ist divergent.

5.2.11

5.2.12

5.2.13

5.2.14

Die Reihe ist absolut konvergent.

5.2.15

5.3 Cauchyprodukt

5.3.1

$$\frac{1}{(1-q_1)(1-q_2)}$$

5.3.2

1

5.3.3

6 Reelle Funktionen - Lösungen und Hinweise

6.1 Beschränktheit, Definitionsbereich

6.1.1

- $D(f \circ g) = (-\infty, -1/2] \cup (0, \infty)$
- $D(g \circ f) = (-2, \infty)$
- $D((f \circ g)^{-1}) = [0, \infty) \setminus \{\sqrt{2}\}$

6.1.2

-

6.2 Stetigkeit

6.2.1

$$D = (-\infty, -3) \cup [0, \infty)$$

6.2.2

6.2.3

6.2.4

6.2.5

6.2.6★

$$\text{etwa } \delta = \frac{3}{10}, \quad (\delta \leq 0.44334)$$

6.2.7★

6.2.8

6.2.9

$$D(f \circ g) = (-1, -1/3], \quad D(g \circ f) = [3/2, \infty)$$

6.2.10

6.2.10

6.2.11

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) = 0$$

6.2.12

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x) = \frac{a+b}{2}$$

6.2.13

6.2.14

6.2.15

6.3 Gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit

6.3.1

$$\delta = \frac{10^{-4}}{25} = 4 \cdot 10^{-6}$$

6.3.2

6.3.3

$$\delta \leq \frac{10^{-3}}{75}$$

6.3.4

6.3.5

Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Intervall $[0,1]$.

6.3.6

6.3.7

etwa $L = 1$, ($L \geq 0.6495$)

6.4 Nullstellen

6.4.1

6.4.2

7 Polynome und algebraische Gleichungen - Lösungen / Hinweise

7.1 Nullstellen, Linearfaktoren

7.1.1

7.1.2

7.1.3

7.1.4

7.1.4

7.1.6

7.1.7

7.1.8

7.2 Interpolation

7.2.1

a) $p(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 11x - 3)$

b) $p(x) = (x^2 - 4x + 3)$

7.2.2

$$p(x) = \frac{x(x - \pi)}{-(\pi/2)^2}$$

7.3 Partialbruchzerlegung

7.3.1

7.3.2

7.3.3

7.3.4

8 Elementare Funktionen - Lösungen und Hinweise

8.1 Trigonometrische und zyklometrische Funktionen

8.1.1

Hinweis: Verwenden Sie die Additionstheoreme.

8.1.2

a) **Hinweis:** Entwickeln Sie die rechte Seite nach dem Summensatz.

b) **Hinweis:** Verwenden Sie die Definitionen von \tan bzw. \cot und $\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}$.

8.1.3

Hinweis: Verwenden Sie die Additionstheoreme.

8.1.4

$$a_0 = \frac{3}{8}, a_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{8}$$

8.1.5

a) $\rho = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53} \wedge \alpha = \arctan \frac{7}{2}$

b) $\rho = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} \wedge \alpha = \arctan(-2) = -\arctan 2$

8.1.6

a), b) **Hinweis:** Verwenden Sie die Definitionen von \tan bzw. \cot sowie die Summensätze.

8.1.7

a), b) **Hinweis:** Wenden Sie die Funktion \tan auf die Gleichung an.

8.1.8

$x = \frac{3+8\sqrt{2}}{15}$ **Hinweis:** Wenden Sie die Funktion \sin auf die Gleichung an.

8.1.9

a) **Hinweis:** Verwenden Sie die Identitäten

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

b) **Hinweis:** Drücken Sie $\sin x$ durch $\cos x$ aus.

8.1.10**8.1.11****8.1.12****8.1.13**

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sqrt{2}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\sqrt{2}$$

Hinweis: Erweitern Sie den Nenner um einen geeigneten Faktor.

8.1.14**8.1.15****8.1.16**

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}$

Hinweis: Leiten Sie aus der Summenformel für \tan eine Summenformel für \arctan her.

8.2 Graphische Aufgaben

8.2.1

8.2.2

8.2.3

8.2.4

8.2.5

8.3 Exponentialfunktion, Logarithmus

8.3.1

a) $1 + \log_a x$

b) 0

8.3.2

Einzigste Nullstelle: $x = 1$.

8.3.3

a) $a^{\ln(\ln a)/\ln a} = \ln a$.

b) $x^{\log_a y}/y^{\log_a x} = 1$.

c) $\log_{a_1}(a_2) \log_{a_2}(a_3) \cdots \log_{a_n}(a_1) = 1$.

8.3.4

a) $x = 1$ und $x = 4$.

b) $x = \frac{3}{2}$.

8.4 Hyperbelfunktionen

8.4.1

a) **Hinweis:** Additionstheorem für cosh.

c) **Hinweis:** Verwenden Sie die Additionstheoreme für sinh und cosh, und leiten Sie daraus ein Additionstheorem für tanh her.

8.4.2

9 Differentialrechnung - Lösungen und Hinweise

9.1 Differenzieren

9.1.1

$$\frac{d \tan(x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

9.1.2

a) $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right), \quad y = 1, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right)$

b) $y = \sqrt{2}, \quad y = 1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad y = -1 - (x - \pi)$

c) $y = 2x - e$

9.1.3

$$f'_+(0) = \begin{cases} \text{nicht def.} & \alpha \leq 1, \\ 0 & \alpha > 1, \end{cases} \quad f'(0^+) = \begin{cases} \text{nicht def.} & \alpha \leq 2 \\ 0 & \alpha > 2. \end{cases}$$

9.1.4

9.1.5

a)

$$f'(x) = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

b)

$$f'(x) = \frac{-(2ax + b)}{2(ax^2 + bx + c)^{\frac{3}{2}}}$$

c)

$$f'(x) = \frac{(bc - 2ad)x + 2c^2 - bd}{2(ax^2 + bx + c)^{\frac{3}{2}}}$$

d)

$$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

9.1.6

a) $f'(x) = -\frac{3x^4 + 22x^3 + 71x^2 + 110x + 10}{(x^2 - 1)^3(x + 5)^2}$

9.1.7

c)

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

d)

$$f'(x) = \frac{m}{(1 - x^q)^{m+1}}(1 - x^p)^{m-1}((p - q)x^{p+q-1} - px^{p-1} + qx^{q-1})$$

9.1.8

9.1.9

9.1.10

a)

$$(f^k(x^2))' = 2x \prod_{i=0}^{k-1} f'(f^i(x^2))$$

b)

$$\left(\left(\frac{1}{1 - x^p} \right)^m \right)' = pm(1 - x^p)^{-m-1} x^{p-1}$$

c)

$$\left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)' = x(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} - 1$$

d)

$$\left(f(\sqrt{1 + x^2}) \right)' = \left(f'(\sqrt{1 + x^2}) \right) x(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

e)

$$\left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -(\sin x)^{-2} \cos x$$

9.1.11

9.1.12

9.1.13

e) **Hinweis:** Drücken Sie x^x mit Hilfe der Exponentialfunktion aus.

9.1.14

a) $t(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-x + 2)$

b) **Achtung:** $f(x)$ ist an x_0 nicht stetig.

9.1.15

9.1.16

a), b) **Hinweis:** Verwenden Sie die Leibnizsche Produktformel.

c) $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!} x^{-k-n}$

9.1.17

a)

$$\frac{1-x}{1+x} = 2 \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

b)

$$(\cos(ax))^{(n)} = \begin{cases} (-1)^m a^{2m-1} \sin(ax), & n = 2m - 1, \quad m \in \mathbb{N} \\ (-1)^m a^{2m} \cos(ax), & n = 2m, \quad m \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

9.1.18

9.1.19

9.2 Differenzierbarkeit, stetige Differenzierbarkeit

9.2.1

9.2.2

9.3 Fehlerrechnung

9.3.1

3.4%

9.3.2

$$\Delta r \approx 8.85 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

9.3.3

$$\Delta h \approx 2.4 \text{ m}$$

9.3.4

9.3.5

$$\Delta A \approx 2R\pi\Delta R$$

9.3.6

9.3.7

9.4 Monotonie, Mittelwertsatz

9.4.1

9.4.2

- a) $f(x)$ ist auf $(\frac{5}{2}, \infty)$ streng monoton fallend
 $f(x)$ ist auf $(-\infty, \frac{5}{2})$ streng monoton steigend

b) $f(x)$ ist auf

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{4j+1}{2}\pi - \Delta, \frac{4j+1}{2}\pi \right) \cup \left(\frac{4j-3}{2}\pi + \Delta, \frac{4j-1}{2}\pi \right)$$

streng monoton steigend. Auf dem Komplement dieser Menge ist die Funktion streng monoton fallend.

Hinweis: Fallunterscheidung

$$h(x)g(x) > 0 \Leftrightarrow (h(x) > 0 \wedge g(x) > 0) \vee (h(x) < 0 \wedge g(x) < 0)$$

9.4.3

9.4.4*

a) **Hinweis:** Wenden Sie dazu den Mittelwertsatz für $f(x) = \sqrt{1+x}$ an geeigneten Stellen an.

b) $\zeta = \sqrt{\frac{7}{3}}$

9.4.5

9.4.6

$$L \geq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

9.4.7

9.5 Unbestimmte Ausdrücke

9.5.1

a) ∞ , b) 1, c) 1, d) 0, e) 0

9.5.2

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{8}$

9.5.3

a) $\frac{1}{6}$
b) $e^{-\frac{1}{3}}$ **Hinweis:** Untersuchen Sie $\ln f(x)$.

9.5.4

a) $\frac{9}{4}$

b) 0 **Hinweis:** $x = \sqrt[k]{x^k}$.

9.5.5

a) 1 **Hinweis:** Untersuchen Sie $\ln f(x)$.

b) 0

c) $\frac{1}{e}$

9.5.6

a) $\frac{2}{3}$

b) -1

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x^{\tan x} = 1$

d) 3

9.5.7

$\frac{1}{k}, \quad -\infty$

9.5.8

$\frac{2}{b}, \quad \frac{2a}{\pi} e^a$

9.5.90 **Hinweis:** Drücken Sie zunächst \cot durch \sin und \cos aus.

e

9.5.10 b) e^{-a}

9.5.11

$-\frac{1}{2} \quad 1$

10 Lokales und globales Verhalten von Funktionen - Lösungen und Hinweise

10.1 Die Größenordnung von Funktionen

10.1.1

10.1.2

10.1.3

a) $k = \sqrt{2}$

b) $k = \frac{1}{2}$

10.1.4

10.1.5

10.2 Extremwertaufgaben

10.2.1

$$l = 4\sqrt{2} \text{ m}$$

10.2.2

$$R = \sqrt[3]{60}$$

10.2.3

Höhe: $\frac{r}{\sqrt{2}}$ Breite: $\sqrt{2}r$

10.3 Kurvendiskussion

10.3.1

10.3.2

Extrema: $x = 0 \quad \vee \quad x = -2$
Wendepunkte: $x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{2}$

10.3.3

10.3.4

10.3.5

10.3.6

11 Iterationsverfahren - Lösungen und Hinweise

11.1 Newtonverfahren

11.1.1

11.1.2

11.1.3

11.1.4

Hinweis: Betrachten Sie ein geeignetes Nullstellenproblem.

11.1.5

12 Das Riemannsches Integral - Lösungen und Hinweise

12.1 Integralrechnung

12.1.1

a) $\sin x + C$

b) $-\frac{1}{5} \cos^5 x + C$ **Hinweis:** Geeignete Substitution

c) $\frac{3 \sin^4 x + 6 \sin^2 x - 1}{3 \sin^3 x} + C$ **Hinweis:** Geeignete Substitution

12.1.2

$$a = -2$$

12.1.3

$$\frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)$$

12.1.4

a) 1 b) 3 c) -2 d) 1

12.1.5**12.1.6**

$\ln(\sin(x)) + C$

12.1.7

$\frac{1}{4} \frac{\cos^3 x}{\sin x} + \frac{3}{8} \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{3}{8} x + C$ **Hinweis:** Partielle Integration.

12.1.8

$-\frac{1}{2} \operatorname{arsinh}(e^{-x^2}) + C$

12.1.9

a) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \sin(bx) - b \cos(bx)] + C$

b) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [b \sin(bx) + a \cos(bx)] + C$

12.1.10**12.1.11**

a) $e^x(x-1) + C$ b) $\frac{x+\sin(x)\cos(x)}{2} + C$

12.1.12

$e^x(x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 5) + C$

12.1.13

$\frac{1}{2} \tan^2(x) + C$

12.1.14

Stammfunktion:

$$\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{\arctan(\frac{x}{a})}{2a^3} + C$$

12.1.15

$$x \arcsin^2 x - 2x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x + C$$

12.1.16

$$x - \arcsin x \sqrt{1-x^2} + C$$

12.1.17

$$\left(\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right) \arcsin x + \frac{1-x^2-\arcsin^2 x}{4} + C$$

12.1.18

a)

$$\frac{1}{5} e^{2x} \left(\sin(x) \left(x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{22}{25} \right) + \cos(x) \left(2x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{4}{25} \right) \right) + C$$

b)

$$-\frac{3}{13} \left(\cosh(-3x) \cos(-2x) + \frac{2}{3} \sinh(-3x) \sin(-2x) \right) + C$$

12.1.19

a) $\ln |\ln x| + C$

b) **Hinweis:** Drücken Sie $\sinh x$ durch die Exponentialfunktion aus und machen Sie eine geeignete Substitution.**12.1.20****Hinweis:** Berechnen Sie das Integral auf zwei Arten.**12.1.21****12.1.22**

$$\frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C \quad \textbf{Hinweis:} \text{ Zweimalige partielle Integration.}$$

12.1.23

a) $x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

b) $x(\ln(x) - 1) + C$

c) $x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$

12.1.24

$$\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

12.1.25

$$-\frac{1}{6} \cos(x)^6 + C$$

12.1.26

$$\frac{1}{30}(1 + x^5)^6 + C$$

12.1.27

$$I_n := \int x^n e^x \sin(x) dx I_n = \frac{1}{2}(x^n e^x (\sin(x) - \cos(x)) + n x^{n-1} e^x \sin(x) - n(n-1) I_{n-2} - 2n I_{n-1})$$

12.1.28

12.1.29

12.1.30

12.1.31

Hinweis: Partialbruchzerlegung

a)

$$\frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \ln |x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

b)

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \ln(|x|) - \frac{1}{2x^2} + C$$

12.1.32

12.1.33

$$-2 \ln |x - 1| + \frac{5}{3} \ln |x - 2| + \frac{1}{6} \ln |x^2 - x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

12.1.34

12.1.35

12.1.36

12.1.37

12.1.38

$$\frac{1}{4}(1 + 3 \ln(x))^{\frac{4}{3}} + C$$

12.1.39

$$\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{\ln a} a^{\sqrt[3]{x}} - \frac{6\sqrt[3]{xa}^{\sqrt[3]{x}}}{\ln^2 a} + \frac{6a^{\sqrt[3]{x}}}{\ln^3 a} + C$$

12.1.40

$$\ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 + e^x}}{1 + \sqrt{1 + e^x}} \right) + C$$

12.1.41

12.1.42

$$-\frac{\arcsin x}{x} + \ln \left| \tan \left(\frac{\arcsin x}{2} \right) \right| + C$$

12.1.43

$$(b - a) \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{a - x}{x - b}} \right) - \frac{\sqrt{\frac{a - x}{x - b}}}{\frac{a - x}{x - b} + 1} \right] + C$$

12.1.44

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\frac{(1-x)^2}{2} - \frac{3(1-x)}{2} \right) + \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

12.1.45

12.1.46

Hinweis: Betrachtung von drei getrennten Brüchen.

$$\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{4}{3} \cot^3 x - \frac{4}{3 \sin^3 x} + C$$

12.1.47

12.1.48

12.1.49

12.1.50

12.1.51

12.2 Uneigentliche Integrale

12.2.1

12.2.2

12.2.3*

a) $\frac{1}{2}$

b) HW = 0

c) Integral existiert für $2 < c < b < 3$. Für $2 > c \vee b > 3$ HW = $\ln \left| \frac{b-3}{b-2} \frac{c-2}{c-3} \right|$

d) HW = 0

12.2.4 a) $-\frac{3+4\ln(0.5)}{2}$ b) -1 c) Das uneigentliche Integral existiert nicht.

12.2.5 a) HW = $\frac{5}{2} + \ln\left(\frac{9}{4}\right)$ b) HW = 0 c) HW = 0

12.2.6 a) HW = $\ln 2$, b) HW = 0.

12.2.7

12.2.8 a) $a > -1, b < 0$ b) $a > -1, b > a + 1$

12.2.9 a) $\frac{1}{(n-1)ab^{n-1}}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

13 Funktionenfolgen und Funktionenreihen - Lösungen / Hinweise

13.1 Konvergenz

13.1.1

$$z = 0$$

13.1.2

$$\operatorname{Re} z < 0$$

13.1.3

$$z = -1$$

13.1.4

$$z = re^{i\varphi} \text{ mit } r > 0, \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$$

13.1.5

$$x < e^{-1}$$

13.1.6

$$n = 7$$

13.1.7

13.1.8

$$x \notin \pi\mathbb{Z}.$$

13.1.9

14 Potenzreihen - Lösungen und Hinweise

14.1 Konvergenzradius, Grenzfunktion

14.1.1

a) $R = 1$, $f(z) = z \frac{1}{(1-z)^2}$

b) $R = 1$, $f(z) = z \frac{1+z}{(1-z)^3}$

c) $R = 1$, $f(z) = (1-z) \ln(1-z) + z$

Hinweis: Berechnung durch gliedweises Integrieren/Differenzieren.

14.1.2

a) $R = \infty$ b) $R = 27$

14.1.3

a) $R = \infty$ b) $R = e$ c) $R = \infty$ d) $R = 0$ e) $R = 1$ f) $R = 1$

14.1.4

a) $R = e$ b) $R = 1$ c) $R = 1$

14.1.5

a) $R = 2$ b) $R = 1$

14.1.6

a) $-1 < z < 1$, $f(z) = z \frac{1}{(1-z)^2}$

b) $-\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}$, $f(z) = 2z \frac{1+2z}{(1-2z)^3}$

c) $-1 < z < 1$

14.1.7

Hinweis: $\sqrt{7} = \sqrt{1+6}$

14.2 Taylorreihen, Taylorpolynome

14.2.1

a)

$$(2 + 3x)^{\frac{3}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{3}{4}-n} 3^n \binom{\frac{3}{4}}{n} x^n$$

$$R_4 \leq \binom{\frac{3}{4}}{4} 3^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{13}{4}} \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

b)

$$\frac{1}{x^2 + 3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n x^{2n}$$

$$R_4 \leq \frac{(5/16 + 9)}{3^5} \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

14.2.2

a) $\frac{1}{1-z^2} = \sum_{v=0}^{\infty} z^{2v}$

14.2.3

a), b), d) **Hinweis:** Machen Sie eine Variablensubstitution $z = \tilde{z} - z_0$.

c) **Hinweis:** Partialbruchzerlegung.

14.2.4

14.2.5

a)

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n}{n!} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Hinweis: $\cos x = \cos\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right)$

14.2.6

a) **Hinweis:** Additionstheorem für $\sin x$,

b) **Hinweis:** Multiplizieren Sie nunächst die dritte Potenz aus.

14.2.7

$$n = 5$$

14.2.8

14.2.9

14.2.10

14.2.11

- a) $\frac{128!^2}{\sqrt{33^64}(64!)^2}$ **Hinweis:** Koeffizientenvergleich in der Taylorreihe.
b) 0, **Hinweis:** Zur Lösung ist keine Rechnung notwendig!

14.2.12

$$a_3 = \frac{3}{2}$$

14.2.13

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n n!^2 (2n+1)}$$

14.2.14

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$$

14.2.15

Koeffizienten: $a_0 = 0, a_1 = \pi, a_2 = -3, a_3 = -\frac{3}{2}\pi$
 $R_4(x) = \frac{1}{6} \int_{-\pi/3}^x (x-t)^3 (-108 \cos 3t + 81t \sin 3t) dt$

A Die Komplexen Zahlen - Lösungen und Hinweise

A.1 Die Gauß'sche Zahlenebene

A.1.1

A.1.2

A.1.3

A.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

A.2.1

a)

$$x + y = 7(1 + i), \quad w - z = \sqrt{2} - 1, \quad \frac{x}{y} = \frac{24 + 7i}{25}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{24 - 7i}{25}, \quad \frac{xy}{yx} = 1, \quad y + iw = 4 - \sqrt{2} + (3 + \sqrt{2})i$$

$$\bar{z} - x = -2 - (\sqrt{2} + 4)i, \quad \frac{xz}{w - \bar{y}} = \frac{32\sqrt{2} - 2 + (\sqrt{2} - 11)i}{29 - 2\sqrt{2}}$$

b)

$$w = 4e^{i\pi/4}, \quad x = 5e^{i\alpha}, \quad y = 5e^{i(\pi/2 - \alpha)}, \quad z = \sqrt{3}e^{i\beta},$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right), \quad \beta = \arctan\sqrt{2}$$

$$xyz = 25\sqrt{3}e^{i(\pi/2 + \beta)}, \quad \frac{y}{z} = \frac{5}{\sqrt{3}}e^{i(\pi/2 - \alpha - \beta)}, \quad \frac{w}{x} = \frac{4}{5}e^{i(\pi/4 - \alpha)}, \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{5}e^{-i\alpha}$$

$$wz = 4\sqrt{3}e^{i(\pi/4 + \beta)}, \quad x^5 = 5^5 e^{5i\alpha}, \quad z^8 = 3^4 e^{i8\beta}$$

A.2.2

$$z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}i \Rightarrow z_1 = 2e^{i2\pi/3}, \quad z_2 = 2e^{i4\pi/3}$$
$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + 2z + 4$$

A.2.3

$$5 - \frac{17}{25} = \frac{108}{25}$$

A.2.4

a) **Hinweis:** $4(1 + i\sqrt{3}) = 8e^{i\pi/3}$

A.2.5