1. a) [ähnlich zu Testaufgabe aus 2013/14:]

Sei f eine differenzierbare Funktion. Geben Sie für $\boxed{\frac{d}{dx}\big(f(x^3)\big)^c \quad (c \in \mathbb{R})}$ einen expliziten Formelausdruck an (in Abhängigkeit von f und f').

b) Beweisen Sie die Identität $\boxed{\frac{d}{dx}\, e^x \;=\; e^x \quad (x \in \mathbb{R})}$, indem Sie von der Ableitungsformel für $\ln x$ ausgehen.

c) Für zwei differenzierbare Funktionen $f(y)$ und $y(x)$ gelte $\boxed{f(y(x)) \;\equiv\; \text{const.}}$

Geben Sie eine hinreichende Bedingung an f an, so dass gilt $y(x) \;\equiv\; \text{const.}$

2. a) Seien f und g zweimal differenzierbare Funktionen. Berechnen Sie $\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\, f\big(g(x)\big)}$

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare [un]gerade Funktion. Ist dann auch die Ableitung $f'(x)$ [un]gerade? Beweisen Sie ein entsprechendes Resultat.

c) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion ☺

$$\boxed{f(x) \;=\; \frac{5\sin(3x + b\sqrt{x^2 + e^{2x}})\,\tan\!\big(\frac{k^2x^2}{1+u^2x^2}\big) + \sqrt[3]{\frac{ax-\ln x}{a^2+x^2}}}{\arccos\!\big(\frac{x}{\sqrt{3+x}}\big) + \frac{3a^2x^3}{\arctan(1/x)} + e^{-\frac{x^2-b^2}{2}}\,\arcsin\sqrt{\frac{3x}{1-x^2}}}}$$

3. a) Seien f und g zwei auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f(0) = g(0)$ und $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Führen Sie das Additionstheorem für den Sinus auf das Additionstheorem für den Cosinus zurück.

c) $(*)$ Sei $x \in (-1,1)$. Differenzieren Sie $\boxed{f(x) = 2\,\arctan x,\;\; g(x) = \arcsin\Big(\frac{2\,x}{1+x^2}\Big)}$
Was schließen Sie daraus?

Hinweis: Schreiben Sie $g'(x)$ in der Form $f'(x)\cdot(\ldots)$ und vereinfachen Sie.

4. Unter welchen Voraussetzungen an die Funktion $f(x)$ existieren die Grenzwerte

$$\boxed{\textbf{a)}\;\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2\,h}\,, \qquad \textbf{b)}\;\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2\,f(x)+f(x-h)}{h^2}} \;\;?$$

Wie lautet dann jeweils der Grenzwert?

5. Berechnen Sie die in UE 4, Aufgabe 7 betrachteten Grenzwerte (sofern sie existieren) mit Hilfe der Regel von de l'Hospital. Geht es auch direkter?

6. a) [Prüfungsaufgabe, 2013:]

Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade $g(x) = c\,x$ den Graphen der Funktion $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x = \xi > 0$ berührt. Geben Sie auch die Stelle ξ an.

b) [Prüfungsaufgabe, 2013:] Gegeben sei die Funktion $\boxed{f(x) \;=\; x^2\, e^{|x|}}$

Für welches $n \in \mathbb{N}$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ k mal stetig differenzierb0 für alle $k \le n$? Untersuchen Sie für dieses n auch das Verhalten von $f^{(n+1)}$.

7. a) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass der Graph der Funktion

$$\boxed{f(x) \;=\; \big(1+x\big)^{\frac{1}{n}} \quad (n = 2,3,4,\ldots)}$$

für $x > 0$ unterhalb ihrer Tangente an der Stelle $x = 0$ verläuft. Haben Sie auch einen alternativen Beweis anzubieten?

b) Die Euler'sche Zahl e ist definiert als $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Wir betrachten nun die Funktion

$$\boxed{f(t) \;=\; \left(1+t\right)^{1/t}} \qquad \text{(vgl. UE 5, Aufgabe 4).}$$

Zeigen Sie, dass tatsächlich gilt $\lim_{t\to 0} f(t) = e$.

(Das ist ein allgemeinerer Limes als in der Definition von e !)

c) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f(t)$ aus **b)** an der Stelle $t = 0$ stetig fortsetzbar ist, und berechnen Sie den entsprechenden Wert $f'(0)$.

Hinweis: Schreiben Sie $f'(t)$ in der Form $f'(t) \;=\; f(t) \cdot g(t)$ und berechnen Sie $\lim_{t\,\to\,0} g(t)$.

Zusatzfrage: Was folgern Sie daraus für die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)$ gegen e ? (Vgl. UE 5, Aufgabe 4.)

8. Aufgabe zur Fehlerrechnung mit Hilfe von Ableitungen:

a) Frau D. sitzt im Donaupark in der Wiese und misst ihre Entfernung zum Donauturm: a m. Dann misst sie von ihrer Position aus den Winkel α zwischen Boden und Turmspitze. Daraus errechnet sie die Höhe h des Turmes (als einfachen Funktionsausdruck in a und α).

Welchen Effekt haben unvermeidliche kleine Störungen in der Messung von a bzw. α auf das Ergebnis in dem errechneten Wert für h ? Welche Standorte von Frau D. wirken sich sehr ungünstig auf die Genauigkeit des Ergebnisses aus?

Anmerkung: Bei den Ableitungen von h nach a und α handelt es sich eigentlich um partielle Ableitungen. Dabei denkt man sich einmal a festgehalten und differenziert nach α, und umgekehrt.

b) Drücken Sie das Ergebnis aus **a)** mit Hilfe von h (fest, 252 m) und α aus. Wie würden Sie α in etwa wählen, damit die Fehleranfälligkeit möglichst gering ist? Begründen Sie Ihre Wahl.

Anmerkung: Eine allfällige Abhängigkeit der Messgenauigkeit von der Distanz zwischen Frau D. und dem Donauturm haben wir dabei nicht berücksichtigt.

9. [a), b) ähnlich zu Prüfungsaufgabe, 2014:]

Zwei Kometen K_1, K_2 bewegen sich entlang folgender Bahnen in der (x, y) - Ebene:

$$\boxed{K_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1+t^2 \end{pmatrix}, \quad K_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2\,t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

a) Entscheiden Sie, ob die Kometen zu irgend einem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ kollidieren. Falls ja, geben Sie den Zeitpunkt $t = t_{koll}$ der Kollision an. Falls nein, geben Sie an, zu welchem Zeitpunkt $t = t_{min}$ die Kometen minimalen Abstand zueinander haben, und geben Sie den minimalen Abstand an. Gibt es mehrere Minima?
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Funktion $f(t)$.

b) Untersuchen Sie, ob die unter **a)** betrachtete Funktion $f(t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ konvex bzw. strikt konvex ist.

c) Berechnen Sie alle Schnittpunkte der beiden Kometenbahnen.

- Worin besteht der Unterschied zu Frage **a)** ?
- Auf welche Schwierigkeit stoßen Sie hier? Wie gehen Sie damit um?

10. 'Physik-Aufgaben' :

a) Auf einem unbekannten Planeten wirft ein Astronaut [1] einen Stein mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s senkrecht nach oben. Nach 10 Sekunden fällt der Stein zu Boden.

- Wie groß ist – in m/s^2 – die Beschleunigung auf Grund der Gravitation (also das Analogon zur Erdbeschleunigung) auf diesem Planeten?
- Wie hoch fliegt der Stein?

Hinweis: Sie benötigen ein (sehr einfaches) Integral.

b) Diskutieren Sie die Frage, ob es – bei hinreichend großer Abwurfgeschwindigkeit – möglich ist, dass sich der Stein vom Planeten wegbewegt und in den Weiten des Alls verschwindet.

[1] Der Einfachheit halber: Die Körpergröße des Astronauten wird vernachlässigt.