ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Übungstest (FR, 04.11.2016) *(3 Gruppen, mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{2.\overline{21}}$ ***unter Verwendung einer geometrischen Summe*** in einen ***möglichst einfachen Bruch*** um. *a): 1 P.*

$$
\begin{aligned}
2.\overline{21} &= 2+\frac{21}{100}+\frac{21}{100^2}+\frac{21}{100^3}+\dots \\
&= 2+21\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n = 2+21\,\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 2+\frac{21}{99} = 2+\frac{7}{33} = \frac{73}{33}
\end{aligned}
$$

b) Geben Sie für $\boxed{\sum_{k=1}^{n} n^{k-1}\binom{n}{k-1} \quad (n\in\mathbb{N})}$ einen ***möglichst einfachen Formelausdruck*** an. *b): 1.25 P.*

'Binomi':

$$
\sum_{k=1}^{n} n^{k-1}\binom{n}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} n^k\,1^{n-k} - \binom{n}{n} n^n = (n+1)^n - n^n
$$

c) Stellen Sie die aus n Termen bestehende Summe[1] $\boxed{-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{3}{16}+\frac{4}{25}-\dots}$ ***unter Verwendung der $\sum$ - Notation*** dar. *c): 0.75 P.*

$$
\underbrace{-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{3}{16}+\frac{4}{25}+\dots}_{n \text{ Summanden}} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\frac{k}{(k+1)^2}
$$

[1] $-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{3}{16}+\frac{4}{25}$ entspricht dem Fall $n=4$ (4 Summanden).

- **Aufgabe 2.**

a) ***Beweisen Sie,*** dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{\sum_{n=1}^{N} n^2 > \frac{N^3}{3}}$ *a): 2 P.*

Beweis mittels Induktion:

- Induktionsanfang ($N = 1$): $1 > \frac{1}{3}$ ✓
- Induktionsschluss $N \mapsto N + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N+1} n^2 &= \sum_{n=1}^{N} n^2 + (N+1)^2 \overset{\text{IND}}{>} \frac{N^3}{3} + (N+1)^2 = \frac{1}{3}\left(N^3 + 3\,(N+1)^2\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(N^3 + 3\,N^2 + 6\,N + 3\right)\\ &> \frac{1}{3}\left(N^3 + 3\,N^2 + 3\,N + 1\right) = \frac{(N+1)^3}{3} \quad \checkmark\end{aligned}$$

b) Sei f eine Funktion, für die gilt $\boxed{|f(k)| \le C \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0}$ mit einer Konstante C, $0 < C < 1$.

Geben Sie eine Konstante $M > 0$ an (in Abhängigkeit von C), so dass gilt

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (f(k))^k \le M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0}$$ *b): 1 P.*

Abschätzung nach oben durch geometrische Summe:

$$\sum_{k=0}^{n} (f(k))^k \le \sum_{k=0}^{n} |(f(k))|^k \le \sum_{k=0}^{n} C^k = \frac{1 - C^{n+1}}{1 - C} \le \frac{1}{1 - C} = M$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. (Beachte: $0 < C^n < 1$, und $\{C^n\}$ ist eine Nullfolge.)

- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei die Funktion[2] $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$, $\boxed{f(n) = n - \frac{1}{n}}$

Untersuchen Sie diese Funktion *(Begründungen angeben):*

(i) ***Ist f injektiv?***[3]

(ii) ***Ist f surjektiv?*** *a): 1 P.*

$f(n) = n - \frac{1}{n}$ ist

(i) injektiv, weil 'strikt monoton wachsend': Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(n+1) \;=\; n+1-\frac{1}{n+1} \;>\; n-\frac{1}{n} \;=\; f(n)$$

(ii) nicht surjektiv: Nicht jedes $y \in \mathbb{Q}_+$ wird als Funktionswert angenommen, z.B. $y = 1$.

b) Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$ mit $\boxed{a_n = \left(\frac{n+1}{k\,n}\right)^n}$ ($k \in \mathbb{N}$ beliebig, fest). *b): 1 P.*

Für welche Werte von k konvergiert diese Folge, und wie lautet ihr Grenzwert in Abhängigkeit von k?[4]

- Für $k = 1$ gilt

$$a_n \;=\; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\to\; e$$

- Für $k > 1$ gilt

$$a_n \;=\; \left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k\,n}\right)^n \;=\; \underbrace{\left(\frac{1}{k}\right)^n}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \;\to\; 0$$

c) Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2} \quad \text{für } n > 1}$ *c): 1 P.*

Geben Sie für die Folgenelemente a_n einen expliziten Formelausdruck in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an.[5]

Es gilt

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= \frac{a_1}{2^2} = \frac{1}{2^2} \\ a_3 &= \frac{a_2}{3^2} = \frac{1}{2^2\,3^2} = \frac{1}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} \\ a_4 &= \frac{a_3}{4^2} = \frac{1}{2^2\,3^2\,4^2} = \frac{1}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)^2} \end{aligned}$$

und allgemein:

$$a_n \;=\; \frac{1}{(n!)^2}\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

---

[2] $\mathbb{Q}_+$ bezeichnet die Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen.

[3] Hinweis: Überlegen Sie – wie verhält sich $f(n)$ mit wachsendem n?

[4] Zur Erinnerung: $e = \lim\limits_{n\to\infty} \ldots$

[5] Streng genommen beruht dies auf einem Induktionsargument; Sie sollen dies jedoch nur in informeller Weise durchführen.

- **Aufgabe 1.**

a) Sei f eine Funktion, für die gilt $\boxed{|f(n)| \leq C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}}$ mit einer Konstante C, $0 < C < 1$.

Geben Sie eine Konstante $K > 0$ ***an (in Abhängigkeit von*** C***), so dass gilt***

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} (f(n))^n \leq K \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}}$$

a): 1 P.

Abschätzung nach oben durch geometrische Summe:

$$\sum_{n=1}^{N} (f(n))^n \leq \sum_{n=1}^{N} |(f(n))|^n \leq \sum_{n=1}^{N} C^n = \frac{1 - C^{N+1}}{1 - C} - 1 \leq \frac{C}{1 - C} = K$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. (Beachte: $0 < C^N < 1$, und $\{C^N\}$ ist eine Nullfolge.)

b) ***Beweisen Sie,*** dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{\frac{n^3}{3} < \sum_{k=1}^{n} k^2}$

b): 2 P.

Beweis mittels Induktion:

- Induktionsanfang $(n = 1)$: $\frac{1}{3} < 1$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{IND}}{>} \frac{n^3}{3} + (n+1)^2 = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3\,(n+1)^2\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(n^3 + 3\,n^2 + 6\,n + 3\right)$$
$$> \frac{1}{3}\left(n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1\right) = \frac{(n+1)^3}{3} \quad ✓$$

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$ mit $\boxed{a_n = \left(\frac{1+n}{m\,n}\right)^n}$ ($m \in \mathbb{N}$ beliebig, fest). *b): 1 P.*

Für welche Werte von m ***konvergiert diese Folge, und wie lautet ihr Grenzwert in Abhängigkeit von*** m***?***[1]

- Für $m = 1$ gilt

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

- Für $m > 1$ gilt

$$a_n = \left(\frac{1}{m\,n} + \frac{1}{m}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{1}{m}\right)^n}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \to 0$$

b) Die Folge $\{b_k\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{b_1 = 1 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{1}{k^2}\, b_{k-1} \quad \text{für } k > 1}$ *c): 1 P.*

Geben Sie für die Folgenelemente b_k ***einen expliziten Formelausdruck in Abhängigkeit von*** $k \in \mathbb{N}$ ***an.***[2]

Es gilt

$$\begin{aligned}
b_1 &= 1 \\
b_2 &= \frac{a_1}{2^2} = \frac{1}{2^2} \\
b_3 &= \frac{a_2}{3^2} = \frac{1}{2^2\,3^2} = \frac{1}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} \\
b_4 &= \frac{a_3}{4^2} = \frac{1}{2^2\,3^2\,4^2} = \frac{1}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)^2}
\end{aligned}$$

und allgemein:

$$b_k = \frac{1}{(k!)^2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

c) Gegeben sei die Funktion[3] $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$, $\boxed{f(n) = \frac{n^2 - 1}{n}}$

Untersuchen Sie diese Funktion *(Begründungen angeben):*

(i) ***Ist*** f ***injektiv?***[4]

(ii) ***Ist*** f ***surjektiv?*** *a): 1 P.*

$f(n) = n - \frac{1}{n}$ ist

(i) injektiv, weil 'strikt monoton wachsend': Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(n+1) = n + 1 - \frac{1}{n+1} > n - \frac{1}{n} = f(n)$$

(ii) nicht surjektiv: Nicht jedes $y \in \mathbb{Q}_+$ wird als Funktionswert angenommen, z.B. $y = 1$.

---

[1] Zur Erinnerung: $e = \lim\limits_{n\to\infty} \ldots$

[2] Streng genommen beruht dies auf einem Induktionsargument; Sie sollen dies jedoch nur in informeller Weise durchführen.

[3] $\mathbb{Q}_+$ bezeichnet die Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen.

[4] Hinweis: Überlegen Sie – wie verhält sich $f(n)$ mit wachsendem n?

- **Aufgabe 3.**

a) Geben Sie für $\boxed{\sum_{m=1}^{N} N^{m-1}\binom{N}{m-1} \quad (N\in\mathbb{N})}$ einen ***möglichst einfachen Formelausdruck*** an.

a): 1.25 P.

'Binomi':

$$\sum_{m=1}^{N} N^{m-1}\binom{N}{m-1} = \sum_{m=0}^{N-1} N^{m}\binom{N}{m} = \sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m} N^{m}\, 1^{N-m} - \binom{N}{N} N^{N} = (N+1)^{N} - N^{N}$$

b) Stellen Sie die aus n Termen bestehende Summe[5] $\boxed{\frac{1}{9}+\frac{2}{16}+\frac{3}{25}+\frac{4}{36}+\ldots}$ ***unter Verwendung der*** $\sum$ ***- Notation*** dar.

c): 0.75 P.

$$\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{2}{16}+\frac{3}{25}+\frac{4}{36}+\ldots}_{n \text{ Summanden}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+2)^2}$$

c) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{2.\overline{18}}$ ***unter Verwendung einer geometrischen Summe*** in einen ***möglichst einfachen Bruch*** um.

c): 1 P.

$$\begin{aligned} 2.\overline{18} &= 2+\frac{18}{100}+\frac{18}{100^2}+\frac{18}{100^3}+\ldots \\ &= 2+18\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n = 2+18\,\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 2+\frac{18}{99} = 2+\frac{2}{11} = \frac{24}{11} \end{aligned}$$

[5] $\frac{1}{9}+\frac{2}{16}+\frac{3}{25}+\frac{4}{36}$ entspricht dem Fall $n=4$ (4 Summanden).

- **Aufgabe 1.**

a) Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_n = \frac{(n-1)^2}{n^2}\, a_{n-1} \quad \text{für } n > 1}$ *a): 1 P.*

Geben Sie für die Folgenelemente a_n einen expliziten Formelausdruck in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an. [1]

Es gilt

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= \frac{(2-1)^2}{2^2}\, a_{n-1} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} \\ a_3 &= \frac{(3-1)^2}{3^2}\, a_{n-1} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{9} \\ a_4 &= \frac{(4-1)^2}{4^2}\, a_{n-1} = \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

und allgemein:

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

b) Gegeben sei die Funktion [2] $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$, $\boxed{f(n) = n - \frac{1}{n^2}}$

Untersuchen Sie diese Funktion *(Begründungen angeben):*

(i) ***Ist f injektiv?*** [3]

(ii) ***Ist f surjektiv?*** *b): 1 P.*

$f(n) = n - \frac{1}{n^2}$ ist

(i) injektiv, weil 'strikt monoton wachsend': Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(n+1) = n + 1 - \frac{1}{(n+1)^2} > n - \frac{1}{n^2} = f(n)$$

(ii) nicht surjektiv: Nicht jedes $y \in \mathbb{Q}_+$ wird als Funktionswert angenommen, z.B. $y = 1$.

c) Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$ mit $\boxed{a_n = \left(\frac{1+n}{k^2\, n}\right)^n}$ ($k \in \mathbb{N}$ beliebig, fest). *c): 1 P.*

Für welche Werte von k konvergiert diese Folge, und wie lautet ihr Grenzwert in Abhängigkeit von k? [4]

- Für $k = 1$ gilt

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

- Für $k > 1$ gilt

$$a_n = \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2\, n}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{1}{k^2}\right)^n}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \to 0$$

[1] Streng genommen beruht dies auf einem Induktionsargument; Sie sollen dies jedoch nur in informeller Weise durchführen.
[2] $\mathbb{Q}_+$ bezeichnet die Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen.
[3] Hinweis: Überlegen Sie – wie verhält sich $f(n)$ mit wachsendem n?
[4] Zur Erinnerung: $e = \lim_{n\to\infty} \ldots$

- **Aufgabe 2.**

a) Stellen Sie die aus n Termen bestehende Summe[5] $\boxed{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{9}{4}+\frac{16}{5}+\ldots}$ ***unter Verwendung der*** $\sum$ ***- Notation*** dar.

a): 0.75 P.

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{9}{4}+\frac{16}{5}+\ldots}_{n \text{ Summanden}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k+1}$$

b) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{2.\overline{09}}$ ***unter Verwendung einer geometrischen Summe*** in einen ***möglichst einfachen Bruch*** um.

b): 1 P.

$$\begin{aligned} 2.\overline{09} &= 2+\frac{9}{100}+\frac{9}{100^2}+\frac{9}{100^3}+\ldots \\ &= 2+9\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n = 2+9\,\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 2+\frac{9}{99} = 2+\frac{1}{11} = \frac{23}{11} \end{aligned}$$

c) Geben Sie für $\boxed{\sum_{k=1}^{n+1} n^k \binom{n}{k-1} \quad (n \in \mathbb{N})}$ einen ***möglichst einfachen Formelausdruck*** an.

c): 1.25 P.

'Binomi':

$$\sum_{k=1}^{n+1} n^k \binom{n}{k-1} = \sum_{k=0}^{n} n^{k+1}\binom{n}{k} = n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} n^k\, 1^{n-k} = n\,(n+1)^n$$

[5] $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{9}{4}+\frac{16}{5}$ entspricht dem Fall $n=4$ (4 Summanden).

- **Aufgabe 3.**

a) ***Beweisen Sie,*** dass für alle $n \geq 2$ gilt $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 < n^3}$ *a): 2 P.*

Beweis mittels Induktion:

- Induktionsanfang ($n = 2$): $1^2 + 2^2 = 5 < 8 = 2^3$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{IND}}{<} n^3 + (n+1)^2 \\ &= n^3 + n^2 + 2n + 1 \\ &< n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 \quad \checkmark\end{aligned}$$

b) Sei (a_n) eine Folge, für die gilt $\boxed{|a_n| \leq c \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}}$ mit einer Konstante c, $0 < c < 1$.

Geben Sie eine Konstante $M > 0$ an (in Abhängigkeit von c), so dass gilt

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} a_n^n \leq M \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}}$$ *b): 1 P.*

Abschätzung nach oben durch geometrische Summe:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n^n \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n|^n \leq \sum_{n=0}^{N} c^n = \frac{1 - c^{N+1}}{1 - c} \leq \frac{1}{1-c} = M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. (Beachte: $0 < c^n < 1$, und $\{c^n\}$ ist eine Nullfolge.)