Aufgaben zu Kapitel 7 und 8

Aufgabe 1: Zerlegung von Polynomen in Linearfaktoren

Aufgabe 2: Polynominterpolation; Approximation mittels Interpolation

Aufgabe 3: (∗) Das Hurwitz-Kriterium

Aufgabe 4: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 5: (∗) Logarithmen: praktische Helferlein

Aufgabe 6: Exponentielles Abklingverhalten

Aufgabe 7: (∗) Eine lustige Umkehrfunktion

Aufgabe 8: (∗) Eine kleine Approximationsaufgabe

Aufgabe 9: Einige der vielen Identitäten zwischen den Winkelfunktionen

Aufgabe 10: Die Funktion arctan2

Zerlegen Sie folgende Polynome in Linearfaktoren $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$:

a) $x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18$

b) $x^3 + x^2 - c^2\,x - c^2, \quad c \in \mathbb{R}$

Für welche Werte von c treten mehrfache Nullstellen (doppelt, dreifach) auf?

c) $5\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2 - 8\,x + 1$

Hinweis: Erraten sie jeweils eine der Nullstellen.

a) Bestimmen Sie – ggf. mit Computerunterstützung – das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 3 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i),\ i = 0 \dots 3\}$:

(i) $\{\,(0,0),\ (1,0),\ (2,0),\ (3,0)\,\}$

(ii) $\{\,(0,1),\ (1,0),\ (2,0),\ (3,0)\,\}$

(iii) $\{\,(0,0),\ (1,1),\ (2,4),\ (3,9)\,\}$

(iv) $\{\,(0,-1),\ (1,0),\ (2,1),\ (3,8)\,\}$

(v) $\{\,(0,e^{-0}),\ (1,e^{-1}),\ (2,e^{-2}),\ (3,e^{-3})\,\}$

b) Werten Sie das unter **a)**, (v) berechnete Polynom $p(x)$ an der Stelle $x = 1/2$ am Rechner mittels des Hornerschemas aus, und berechnen Sie den Interpolationsfehler $p(1/2) - e^{-1/2}$.

c) Zeichnen Sie am Rechner grafisch den Verlauf des unter **a)**, (v) berechneten Polynoms $p(x)$ für $x \in [0,5]$, und vergleichen Sie dies mit dem Verlauf der Funktion e^{-x}. Was beobachten Sie?

(∗) Oft interessiert man sich nur dafür, ob ein Polynom lediglich Nullstellen (z.B.) mit negativem Realteil hat, ohne die Nullstellen zu berechnen.

Dafür gibt es einen klassischen Algorithmus, das sogenannte *Hurwitz-Kriterium.* Für Polynomgrad 3 lautet dieses:

> Betrachte $p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3, \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, \quad a_3 \neq 0.$
>
> Wir nehmen an $a_0 \neq 0$, sonst wäre ja $x = 0$ eine Nullstelle.
> Darüber hinaus nehmen wir o.B.d.A. an $a_0 > 0$.
>
> *Genau dann wenn gilt*
>
> $$\begin{aligned} &a_1 > 0, \\ &a_1\,a_2 - a_0\,a_3 > 0, \\ &a_3\,(a_1\,a_2 - a_0\,a_3) > 0, \end{aligned}$$
>
> *haben alle Nullstellen von* $p(x)$ *negativen Realteil.*

Überprüfen Sie dies anhand folgender Beispiele:

a) $p(x) \;=\; x^3 + 3\,x^2 + 4\,x + 2$

b) $p(x) \;=\; x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6$

c) Für Polynomgrad 2, d.h. für

$$p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_2 \neq 0$$

ist das Kriterium sehr einfach:

> *Genau dann wenn gilt* $sign(a_0) \;=\; sign(a_1) \;=\; sign(a_2)$,
> *haben alle Nullstellen von* $p(x)$ *negativen Realteil.*

Beweisen Sie dieses Kriterium.

Hinweis: Fallunterscheidung, unter Verzicht auf die Verwendung der Lösungsformel für die quadratische Gleichung.

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung (PBZ) folgender rationaler Funktionen:

a) $$\frac{3\,x^2 - 9\,x + 6}{x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18}$$

b) $$\frac{x}{x^3 + x^2 - c^2\,x - c^2}\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

Hinweis zu **b):** Berücksichtigen Sie Sonderfälle (spezielle Werte des Parameters c).

(∗)

a) Sei $0 \neq x \in \mathbb{R}$. Unter einer *halblogarithmischen* Darstellung von x versteht man eine Darstellung der Form

$$x = \pm\, s \cdot b^e, \quad \text{mit} \quad s \in (0,1), \quad e \in \mathbb{Z}$$

Dabei ist $b \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$ eine fest gewählte 'Basis'. Das Zahlenpaar (s,e) repräsentiert $|x|$. (e steht hier für 'Exponent'.)

(i) Erläutern Sie den Begriff 'halblogarithmisch'.

(ii) Wir betrachten Dezimaldarstellung, d.h. wir wählen $b = 10$.

Sei $x = \pm\, s \cdot b^e$ mit $s = 0.d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7d_8d_9d_{10}$, $d_i \in \{0,1,\ldots,9\}$, wobei $d_1 > 0$, und $|e| < 1000$. Was sind das für Zahlen? Was bedeutet $d_1 > 0$?

b) Stark exponentiell wachsende oder fallende Funktionen $f(x)$ lassen sich nicht gut direkt grafisch darstellen, weil ihre Werte über viele Größenordnungen variieren. Man wählt daher eine logarithmische Darstellung, d.h. man zeichnet z.B. $\log_{10}(f(x))$.

Sei $\quad f(x) = a^x, \quad x \geq 0$

wobei $a > 0$. Beschreiben Sie, wie der Verlauf von $\log_{10}(f(x))$ aussieht. Was ergibt sich speziell für $a = 10^k$ $(k \in \mathbb{Z})$?

c) Für eine Potenzfunktion $f(x) = x^a, \quad x > 0$, mit $a \in \mathbb{R}$, eignet sich eine *doppelt-logarithmische* Darstellung:

Setze $\xi = \ln x$ und $\eta = \ln(f(x))$. Dann entspricht die Funktion $f(x) = x^a$ einer Funktion $\eta = g(\xi)$. Geben Sie diese Funktion g an.

Angenommen, Sie kennen den Wert von a nicht – wie können Sie diesen aus der doppelt-logarithmischen Darstellung ablesen?

a) Für eine zeitabhängige physikalische Größe $X(t)$ gelte

$$X(t) = C\, e^{\lambda t}, \quad \text{mit} \quad C = X(0) \;\; \text{und bekanntem} \;\; \lambda < 0.$$

Zu welchem Zeitpunkt t fällt der Wert $X(t)$ auf das 10^n - fache ab im Vergleich zu $X(0)$ $(n \in \mathbb{N})$?

b) Licht, das in eine Schicht aus Glas eintritt, wird in exponentieller Weise abgeschwächt (Absorption), d.h., es gilt ein Abschwächungsgesetz analog zum Zerfallsgesetz aus **a)**.

Für ein konkretes Material (Glas) wird gemessen, dass die Intensität des Lichtes pro zurückgelegtem Millimeter um 1% abnimmt. Auf wieviel % des Ausgangswertes wird dann die Intensität des Lichtes durch eine 5 cm dicke Glasscheibe abgeschwächt?

(∗) Sei $W(x)$ definiert als die Umkehrfunktion von $f(x) = x\,e^x,\ x \geq 0.$

$W(x)$ ist nicht in elementarer Weise als Formelausdruck darstellbar, aber wohldefiniert. Wir nehmen sie in unseren Zoo von Standardfunktionen mit auf.

a) (i) Zeigen Sie: $W(x)$ ist strikt monoton wachsend für $x \geq 0$.

(ii) Drücken Sie $\ln(W(x))$ mittels $\ln x$ und $W(x)$ aus und bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{W(x)}$$

b) (i) Drücken Sie die eindeutige Lösung der Gleichung $x = e^{-x}$ $(x > 0)$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.

(ii) Drücken Sie die eindeutige Lösung der Gleichung $x^2 = e^{-x}$ $(x > 0)$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.

(∗)

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Exponentialfunktion den Limes

$$\lim_{x \to 0} \big(\ln(1+x) - x \big)$$

b) Wir werten die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ am Rechner aus, und zwar für $x = 10^{-1}$, 10^{-2}, 10^{-3}, usw.

Tabelle der auf 10 Dezimalstellen exakt gerundeten Werte:

```
      x        f(x) = ln(1+x)
-----------------------------
   1e-01    0.95310179804e-01
   1e-02    0.99503308532e-02
   1e-03    0.99950033308e-03
   1e-04    0.99995000333e-04
   1e-05    0.99999500003e-05
   1e-06    0.99999950000e-05
   1e-07    0.99999995000e-07
   1e-08    0.99999999500e-08
   1e-09    0.99999999950e-09
   1e-10    0.99999999995e-10
```

Versuchen Sie aufgrund dieser Tabelle zu erkennen, welches quadratische Polynom $q(x)$ für kleine x offenbar eine sehr gute Approximation von $f(x)$ darstellt.

c) Die Relation $\ln(1+x) \approx q(x)$ für $|x| \ll 1$, mit $q(x) = a_1\, x + a_2\, x^2$, kann man auch schreiben als $\exp(q(x)) \approx 1 + x$. Entwicklen Sie $\exp(q(x))$ nach Potenzen von x, d.h., bestimmen Sie die ersten Terme dieser Entwicklung und vergleichen diese mit $1 + x$. Dies ergibt die gesuchten Werte für a_1 und a_2.

Haben Sie in **b)** richtig getippt?

a) Beweisen Sie die Identitäten

(i) $2\,\cos^2 x = 1 + \cos(2\,x)$

(ii) $2\,\sin^2 x = 1 - \cos(2\,x)$

(iii) $4\,\cos^3 x = 3\,\cos x + \cos(3\,x)$

(iv) $4\,\sin^3 x = 3\,\sin x - \sin(3\,x)$

b) Zeichnen Sie die folgenden ‘modulierten’ trigonometrischen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$:

(i) $\cos x\,\sin(2\,x)$

(ii) $\sin x\,\sin(2\,x)$

(iii) $\sin x\,\cos(n\,x)$ $n \in \mathbb{N}$

Jeder Punkt mit kartesischen Koordinaten (x, y) auf einem Kreis in der Ebene mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r ist in Polarkoordinaten eindeutig darstellbar als $(x, y) = (r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Spezifizieren Sie eine Funktion

$$\operatorname{arctan2}(y, x)$$

in den zwei Variablen y und x, die zu beliebigen gegebenem (x, y) auf dem Einheitskreis den entsprechenden Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ zurückliefert.

– Was ist $\operatorname{arctan2}(0, 0)$?

– Warum definiert man diese Funktion?