ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Übungstest (FR, 12.01.2018) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Entscheiden Sie, **für welche Werte des Parameters** $m \in \mathbb{N}$ **die Reihe** $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^m}{m^k}}$ **konvergiert**.

a): 0.75 P.

Verwende Quotientenkriterium (alle Summanden sind positiv):

$$\frac{\frac{(k+1)^m}{m^{k+1}}}{\frac{k^m}{m^k}} = \frac{\left(\frac{k+1}{k}\right)^m}{m} \to \frac{1}{m} \quad \text{für} \quad k \to \infty$$

$\Rightarrow$ Die Reihe ist konvergent für $m \geq 2$. Für $m = 1$ ist die Reihe offensichtlich divergent.

b) Berechnen Sie den **Wert der Reihe** $\boxed{\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{1+k}}$ ($m \in \mathbb{N}$ fest gewählt)

b): 1 P.

Hinweis: Formen Sie den Summanden geeignet um.

Verwende Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{k\,(1+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$\Rightarrow$ Konvergente Teleskopreihe:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{1+k} = \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \ldots = \frac{1}{m}$$

c) Sei $c > 0$ fest gewählt. **Für welche Werte** $0 \neq x \in \mathbb{R}$ **konvergiert die Reihe** $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2\,k}}{(c\,x)^k}}$?

c): 0.5 P.

Geometrische Reihe:

$$\left|\frac{(-1) \cdot x^2}{c\,x}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < |c|$$

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |c|$.

d) Berechnen Sie den **Wert der Reihe aus c)** für den Fall $x = \frac{c}{2}$.

d): 0.75 P.

Verwende Formel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{c}{2}\right)^{2\,k}}{\left(\frac{c^2}{2}\right)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\frac{c^{2\,k}}{4^k}}{\frac{c^{2\,k}}{2^k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{-\frac{1}{2}}{1 - (-\frac{1}{2})} = -\frac{1}{3}$$

- **Aufgabe 2.**

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\boxed{f\colon [0,\infty) \to [1,\infty), \quad f(x) = \dfrac{x^4 - x^3 + x - 1}{x-1}}$ eine **hebbare Unstetigkeit** an der Stelle $x = 1$ hat. Geben Sie für $f(x)$ einen entsprechend **vereinfachten Formelausdruck** an. Entscheiden Sie auch, ob f **bijektiv** ist. *a): 1.25 P.*

$x = 1$ ist Nullstelle des Zählers. Polynomdivision ergibt

```
       x^4 - x^3 - 0 x^2 + x - 1   /   x - 1   =   x^3 + 1
  -    x^4 - x^3
     -----------------------------
              0            x - 1
  -                        x - 1
     -----------------------------
                               0
```

$\Rightarrow$ Die an $x = 1$ stetig fortgesetzte Funktion f lautet

$$f(x) \;=\; x^3 + 1$$

f ist bijektiv:

– injektiv, da strikt monoton wachsend

– surjektiv aufgrund des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen, da

$$f(0) = 1 \quad \text{und} \quad f(x) \to \infty \quad \text{für } x \to \infty.$$

b) Geben Sie die **Umkehrfunktion** für $\boxed{f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(x + x^2)}$ an. *b): 1 P.*

Die Bestimmung der Umkehrfunktion entspricht der formelmäßigen Lösung der Gleichung $f(x) = y$ nach x für gegebenes $y \in \mathbb{R}$. Dies führt hier auf eine quadratische Gleichung für x:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x + x^2) = y \quad \Leftrightarrow \quad x + x^2 = e^y$$

$$\Rightarrow \qquad x_{1,2} \;=\; \frac{1}{2}\Big(-1 \pm \sqrt{1 + 4\,e^y}\Big)$$

Da $x \in (0,\infty)$, lautet die gesuchte Umkehrfunktion $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$:

$$f^{-1}(y) \;=\; \frac{1}{2}\Big(-1 + \sqrt{1 + 4\,e^y}\Big)$$

c) **Wie viele positive Nullstellen** hat das Polynom $\boxed{f(x) = x^2\,(1 + x) - 3}$?

Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Nullstelle(n) zu berechnen. *c): 0.75 P.*

- $f(x) = x^3 + x^2 - 3$ ist stetig, mit

$$f(0) = -3 < 0 \quad \text{und} \quad f(x) \to \infty \quad \text{für } x \to \infty$$

$\Rightarrow$ f hat mindestens eine positive Nullstelle (Zwischenwertsatz).

- f ist strikt monoton wachsend und somit injektiv.

$\Rightarrow$ f hat genau eine positive Nullstelle.

- **Aufgabe 3.**

a) Die Funktion $\boxed{f(x) \;=\; 1+|x|}$ soll durch ein Polynom $p(x)$ von möglichst geringem Grad approximiert werden, das an den Stellen $x = -1, 0, 1$ mit $f(x)$ übereinstimmt. **Geben Sie $p(x)$ aufgrund dieser Forderungen explizit an.**

a): 1 P.

Ansatz für das Interpolationspolynom $p(x)$ mit Grad 2:

$$p(x) \;=\; a + b\,x + c\,x^2$$

$p(x)$ soll an den Stellen $x = -1, 0, 1$ mit $f(x)$ übereinstimmen. Dies ergibt drei lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 = f(0) \;&\overset{!}{=}\; p(0) = a \\ 2 = f(1) \;&\overset{!}{=}\; p(1) = a + b + c \\ 2 = f(-1) \;&\overset{!}{=}\; p(-1) = a - b + c \end{aligned}$$

Lösung:

$$a = 1 \quad\Rightarrow\quad 1 = b + c, \quad 1 = -b + c \quad\Rightarrow\; b = 0 \quad\Rightarrow\; c = 1$$

$\Rightarrow$

$$p(x) \;=\; 1 + x^2$$

b) **Zeigen Sie,** dass für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Identität der Gestalt $\boxed{\big(\sin(\tfrac{x}{2}) + \cos(\tfrac{x}{2})\big)^2 \;=\; c + \sin x}$ gilt. Wie lautet der korrekte Wert für die Konstante c?

b): 1 P.

Linke Seite ausmultiplizieren und umformen (verwende Additionstheorem für sin) :

$$\begin{aligned} \big(\sin(\tfrac{x}{2}) + \cos(\tfrac{x}{2})\big)^2 \;&=\; (\sin(\tfrac{x}{2}))^2 + 2\,\sin(\tfrac{x}{2})\,\cos(\tfrac{x}{2}) + (\cos(\tfrac{x}{2}))^2 \\ &=\; 1 + 2\,\sin(\tfrac{x}{2})\,\cos(\tfrac{x}{2}) \\ &=\; 1 + \sin(2\cdot\tfrac{x}{2}) \;=\; 1 + \sin x \end{aligned}$$

(mit der Konstante $c = 1$).

c) Geben Sie für $\boxed{\exp\Big(\sum_{k=1}^{n} \ln(k^n)\Big)}$ $(n \in \mathbb{N})$ einen **möglichst einfachen Formelausdruck** an, in dem weder exp noch ln vorkommen.

c): 1 P.

$$\exp\Big(\sum_{k=1}^{n} \ln(k^n)\Big) \;=\; \exp\Big(\sum_{k=1}^{n} n\,\ln k\Big) \;=\; \prod_{k=1}^{n} \exp(n\,\ln k) \;=\; \prod_{k=1}^{n} k^n \;=\; \Big(\prod_{k=1}^{n} k\Big)^n \;=\; (n!)^n$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2017/18

A N A L Y S I S I F Ü R T P H, U E (103.088)

2. Übungstest (FR, 12.01.2018) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Geben Sie für $\boxed{\exp\Big(\sum_{j=1}^{m}\ln(j^m)\Big)}$ $(m\in\mathbb{N})$ einen **möglichst einfachen Formelausdruck** an, in dem weder exp noch ln vorkommen. *a): 1 P.*

$$\exp\Big(\sum_{j=1}^{m}\ln(j^m)\Big) \;=\; \exp\Big(\sum_{j=1}^{m} m\,\ln j\Big) \;=\; \prod_{j=1}^{m}\exp(m\,\ln j) \;=\; \prod_{j=1}^{m} j^m \;=\; \Big(\prod_{j=1}^{m} j\Big)^m \;=\; (m!)^m$$

b) Die Funktion $\boxed{g(t) \;=\; 1+|t|}$ soll durch ein Polynom $p(t)$ von möglichst geringem Grad approximiert werden, das an den Stellen $t=-1,0,1$ mit $g(t)$ übereinstimmt. **Geben Sie** $p(t)$ **aufgrund dieser Forderungen explizit an.** *b): 1 P.*

Ansatz für das Interpolationspolynom $p(t)$ mit Grad 2:

$$p(t) \;=\; a+b\,t+c\,t^2$$

$p(t)$ soll an den Stellen $t=-1,0,1$ mit $g(t)$ übereinstimmen. Dies ergibt drei lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} 1=g(0) &\overset{!}{=} p(0)=a \\ 2=g(1) &\overset{!}{=} p(1)=a+b+c \\ 2=g(-1) &\overset{!}{=} p(-1)=a-b+c \end{aligned}$$

Lösung:

$$a=1 \quad\Rightarrow\quad 1=b+c,\quad 1=-b+c \quad\Rightarrow\; b=0 \quad\Rightarrow\; c=1$$

$\Rightarrow$

$$p(t) \;=\; 1+t^2$$

c) **Zeigen Sie,** dass für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ eine Identität der Gestalt $\boxed{\big(\sin(\tfrac{\alpha}{2})+\cos(\tfrac{\alpha}{2})\big)^2 \;=\; \sin\alpha+\beta}$ gilt. Wie lautet der korrekte Wert für die Konstante β? *c): 1 P.*

Linke Seite ausmultiplizieren und umformen (verwende Additionstheorem für sin):

$$\begin{aligned} \big(\sin(\tfrac{\alpha}{2})+\cos(\tfrac{\alpha}{2})\big)^2 &= (\sin(\tfrac{\alpha}{2}))^2+2\,\sin(\tfrac{\alpha}{2})\,\cos(\tfrac{\alpha}{2})+(\cos(\tfrac{\alpha}{2}))^2 \\ &= 1+2\,\sin(\tfrac{\alpha}{2})\,\cos(\tfrac{\alpha}{2}) \\ &= 1+\sin(2\cdot\tfrac{\alpha}{2}) \;=\; \sin\alpha+1 \end{aligned}$$

(mit der Konstante $\beta=1$).

- **Aufgabe 2.**

a) Sei $k>0$ fest gewählt. **Für welche Werte** $0 \neq y \in \mathbb{R}$ **konvergiert die Reihe** $\boxed{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j\, y^{2\,j}}{k^j\, y^j}}$? *a): 0.5 P.*

Geometrische Reihe:

$$\left|\frac{(-1)\cdot y^2}{k\,y}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |y| \;<\; |k|$$

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| < |k|$.

b) Berechnen Sie den **Wert der Reihe aus a)** für den Fall $y = \frac{k}{3}$. *b): 0.75 P.*

Verwende Formel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{k}{3}\right)^{2\,j}}{\left(\frac{k^2}{3}\right)^j} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \, \frac{\frac{k^{2\,j}}{9^j}}{\frac{k^{2\,j}}{3^j}} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^j = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{4}$$

c) **Für welche Werte des Parameters** $m \in \mathbb{N}$ **konvergiert die Reihe** $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^m}{m^n}}$? **(Begründung!)**. *c): 0.75 P.*

Verwende Quotientenkriterium (alle Summanden sind positiv):

$$\frac{\frac{(n+1)^m}{m^{n+1}}}{\frac{n^m}{m^n}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^m}{m} \to \frac{1}{m} \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Die Reihe ist konvergent für $m \geq 2$. Für $m = 1$ ist die Reihe offensichtlich divergent.

d) Berechnen Sie den **Wert der Reihe** $\boxed{\sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{1}{\ell}\,\frac{1}{\ell+1}}$ *d): 1 P.*

Hinweis: Formen Sie den Summanden geeignet um.

Verwende Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{\ell\,(\ell+1)} = \frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell+1}$$

$\Rightarrow$ Konvergente Teleskopreihe:

$$\sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{1}{\ell}\,\frac{1}{1+\ell} = \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell+1}\right) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots = \frac{1}{2}$$

- **Aufgabe 3.**

a) **Wie viele positive Nullstellen** hat das Polynom $\boxed{p(y) = (1+y)\,y^2 - 2}$?

Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Nullstelle(n) zu berechnen. *a): 0.75 P.*

- $p(y) = y^3 + y^2 - 2$ ist stetig, mit

$$p(0) = -2 < 0 \quad \text{und} \quad p(y) \to \infty \quad \text{für } y \to \infty$$

$\Rightarrow$ p hat mindestens eine positive Nullstelle (Zwischenwertsatz).

- p ist strikt monoton wachsend und somit injektiv.

$\Rightarrow$ p hat genau eine positive Nullstelle.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\boxed{f\colon [0,\infty) \to [2,\infty), \quad f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2}{x-1}}$ eine **hebbare Unstetigkeit** an der Stelle $x = 1$ hat. Geben Sie für $f(x)$ einen entsprechend **vereinfachten Formelausdruck** an. Entscheiden Sie auch, ob f **bijektiv** ist. *b): 1.25 P.*

$x = 1$ ist Nullstelle des Zählers. Polxnomdivision ergibt

```
          x^3 + x^2       - 2   /   x - 1    =   x^2 + 2x + 2
     -    x^3 - x^2
       -----------------------------
              2x^2        - 2
     -        2x^2 - 2x
       -----------------------------
                     2x - 2
     -               2x - 2
       -----------------------------
                          0
```

$\Rightarrow$ Die an $x = 1$ stetig fortgesetzte Funktion f lautet

$$f(x) \;=\; x^2 + 2\,x + 2$$

f ist bijektiv:

– injektiv, da strikt monoton wachsend

– surjektiv aufgrund des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen, da

$$f(0) = 2 \quad \text{und} \quad f(x) \to \infty \quad \text{für } x \to \infty.$$

c) Geben Sie die **Umkehrfunktion** für $\boxed{g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln(x^2 + 2\,x)}$ an. *c): 1 P.*

Die Bestimmung der Umkehrfunktion entspricht der formelmäßigen Lösung der Gleichung $g(x) = y$ nach x für gegebenes $y \in \mathbb{R}$. Dies führt hier auf eine quadratische Gleichung für x:

$$g(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2 + 2\,x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2\,x = e^y$$

$$\Rightarrow \qquad x_{1,2} \;=\; \frac{1}{2}\Big(-2 \pm \sqrt{4 + 4\,e^y}\Big) \;=\; -1 \pm \sqrt{1 + e^y}$$

Da $x \in (0,\infty)$, lautet die gesuchte Umkehrfunktion $g\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$:

$$g^{-1}(y) \;=\; -1 + \sqrt{1 + e^y}$$

A N A L Y S I S I F Ü R T P H, U E (103.088)

2. Übungstest (FR, 12.01.2018) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Geben Sie die **Umkehrfunktion** für $\boxed{h\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad h(t) = \ln(t^2 + 4\,t)}$ an. *a): 1 P.*

Die Bestimmung der Umkehrfunktion entspricht der formelmäßigen Lösung der Gleichung $h(t) = y$ nach t für gegebenes $y \in \mathbb{R}$. Dies führt hier auf eine quadratische Gleichung für t:

$$h(t) = y \quad \Leftrightarrow \quad \ln(t^2 + 4\,t) = y \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + 4\,t = e^y$$

$$\Rightarrow \qquad t_{1,2} \; = \; -\,2 \pm \sqrt{4 + e^y}$$

Da $t \in (0,\infty)$, lautet die gesuchte Umkehrfunktion $h\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$:

$$h^{-1}(y) \; = \; -\,2 + \sqrt{4 + e^y}$$

b) **Wie viele positive Nullstellen** hat das Polynom $\boxed{p(x) = -1 + x^2\,(1 + x)}$?

Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Nullstelle(n) zu berechnen. *b): 0.75 P.*

- $p(x) = x^3 + x^2 - 1$ ist stetig, mit

$$p(0) = -1 < 0 \quad \text{und} \quad p(x) \to \infty \quad \text{für } x \to \infty$$

$\Rightarrow$ p hat mindestens eine positive Nullstelle (Zwischenwertsatz).

- p ist strikt monoton wachsend und somit injektiv.

$\Rightarrow$ p hat genau eine positive Nullstelle.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $\boxed{h\colon [0,\infty) \to [3,\infty), \quad h(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x - 3}{x - 1}}$ eine **hebbare Unstetigkeit** an der Stelle $x = 1$ hat. Geben Sie für $h(x)$ einen entsprechend **vereinfachten Formelausdruck** an. Entscheiden Sie auch, ob h **bijektiv** ist. *c): 1.25 P.*

$x = 1$ ist Nullstelle des Zählers. Polynomdivision ergibt

```
           x^3 + x^2 + x - 3   /    x - 1   =   x^2 + 2x + 3
      -    x^3 - x^2
        -----------------------------
                2x^2 + x - 3
      -         2x^2 -2x
        -----------------------------
                      3x - 3
      -               3x - 3
        -----------------------------
                           0
```

$\Rightarrow$ Die an $x = 1$ stetig fortgesetzte Funktion h lautet

$$h(x) \; = \; x^2 + 2\,x + 3$$

h ist bijektiv:

– injektiv, da strikt monoton wachsend

– surjektiv aufgrund des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen, da

$$h(0) = 3 \quad \text{und} \quad h(x) \to \infty \quad \text{für } x \to \infty.$$

- **Aufgabe 2.**

a) **Zeigen Sie,** dass für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt $\boxed{\left(\cos(\frac{s}{2}) + \sin(\frac{s}{2})\right)^2 - \sin s \;=\; \kappa \;=\; \text{const.}}$

Wie lautet der korrekte Wert für die Konstante κ? *a): 1 P.*

Linke Seite ausmultiplizieren und umformen (verwende Additionstheorem für sin):

$$\begin{aligned}\left(\cos(\tfrac{s}{2}) + \sin(\tfrac{s}{2})\right)^2 - \sin s \;&=\; (\cos(\tfrac{s}{2}))^2 + 2\,\sin(\tfrac{s}{2})\,\cos(\tfrac{s}{2}) + (\sin(\tfrac{s}{2}))^2 - \sin s \\ &=\; 1 + 2\,\sin(\tfrac{s}{2})\,\cos(\tfrac{s}{2}) \\ &=\; 1 + \sin(2\cdot\tfrac{s}{2}) - \sin s \;=\; 1\end{aligned}$$

(mit der Konstante $\kappa = 1$).

b) Geben Sie für $\boxed{\exp\left(\sum_{\ell=1}^{k} \ln(\ell^k)\right)}$ $(k \in \mathbb{N})$ einen **möglichst einfachen Formelausdruck** an, in dem weder exp noch ln vorkommen. *b): 1 P.*

$$\exp\left(\sum_{\ell=1}^{k} \ln(\ell^k)\right) \;=\; \exp\left(\sum_{\ell=1}^{k} k\,\ln\ell\right) \;=\; \prod_{\ell=1}^{k} \exp(k\,\ln\ell) \;=\; \prod_{\ell=1}^{k} \ell^k \;=\; \left(\prod_{\ell=1}^{k}\right)^k \;=\; (k!)^k$$

c) Die Funktion $\boxed{h(s) \;=\; |s| + 1}$ soll durch ein Polynom $q(s)$ von möglichst geringem Grad approximiert werden, das an den Stellen $s = -1, 0, 1$ mit $h(s)$ übereinstimmt. **Geben Sie $q(s)$ aufgrund dieser Forderungen explizit an.** *c): 1 P.*

Ansatz für das Interpolationspolynom $q(s)$ mit Grad 2:

$$q(s) \;=\; a + b\,s + c\,s^2$$

$q(s)$ soll an den Stellen $s = -1, 0, 1$ mit $h(s)$ übereinstimmen. Dies ergibt drei lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 = h(0) \;&\overset{!}{=}\; q(0) = a \\ 2 = h(1) \;&\overset{!}{=}\; q(1) = a + b + c \\ 2 = h(-1) \;&\overset{!}{=}\; q(-1) = a - b + c \end{aligned}$$

Lösung:

$$a = 1 \quad\Rightarrow\quad 1 = b + c, \quad 1 = -b + c \quad\Rightarrow\; b = 0 \quad\Rightarrow\; c = 1$$

$\Rightarrow$

$$q(s) \;=\; 1 + s^2$$

- **Aufgabe 3.**

a) Berechnen Sie den **Wert der Reihe** $\boxed{\sum_{j=4}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{1}{j-1}}$ *a): 1 P.*

Verwende Partialbruchzerlegung: $$\frac{1}{j\,(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}$$

$\Rightarrow$ Konvergente Teleskopreihe:

$$\sum_{j=4}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{1}{j-1} = \sum_{j=4}^{\infty} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots = \frac{1}{3}$$

b) Sei $\kappa > 0$ fest gewählt. **Für welche Werte $0 \neq s \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe** $\boxed{\sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{s^{2\,\ell}}{(\kappa\, s)^{\ell}}}$? *b): 0.5 P.*

Geometrische Reihe:
$$\left|\frac{(-1)\cdot s^2}{\kappa\, s}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |s| < |\kappa|$$

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $|s| < |\kappa|$.

c) Berechnen Sie den **Wert der Reihe aus b)** für den Fall $s = \frac{\kappa}{2}$. *c): 0.75 P.*

Verwende Formel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2\,\ell}}{\left(\frac{\kappa^2}{2}\right)^{\ell}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{\frac{\kappa^{2\,\ell}}{4^{\ell}}}{\frac{\kappa^{2\,\ell}}{2^{\ell}}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{\ell} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

d) Weisen Sie nach, **für welche Werte der Konstante $k \in \mathbb{N}$ die Reihe** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n^k\, k^{-n}}$ **konvergiert**. *d): 0.75 P.*

Verwende Quotientenkriterium (alle Summanden sind positiv):

$$\frac{\frac{(n+1)^k}{k^{n+1}}}{\frac{n^k}{k^n}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^k}{k} \to \frac{1}{k} \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Die Reihe ist konvergent für $k \geq 2$. Für $k = 1$ ist die Reihe offensichtlich divergent.