

Aufgaben zu Kapitel 10, 11 und (ein wenig) 12

Aufgabe 1: Kurvendiskussion I

Aufgabe 2: (\*) Kurvendiskussion II

Aufgabe 3: (\*) Wachstum einer Population, mit Sättigungseffekt

Aufgabe 4: (\*) Fermat'sches Prinzip

Aufgabe 5: (\*) Ums Eck

Aufgabe 6: Eine Kurvenschar

Aufgabe 7: Die Hüllkurve einer Geradenschar

Aufgabe 8: Ein modifiziertes Newton-Verfahren

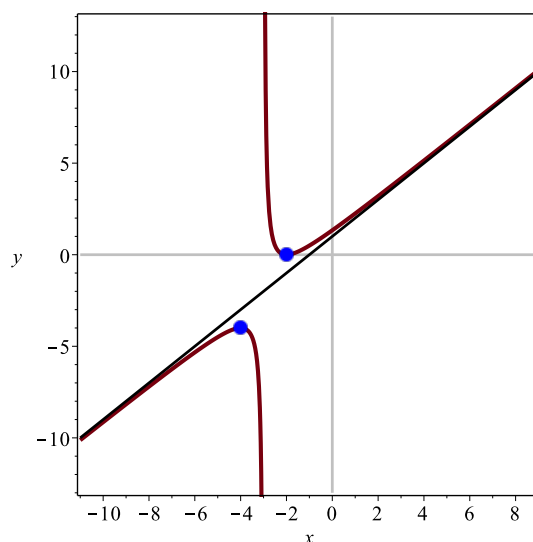
Aufgabe 9: Buckelfunktionen

Aufgabe 10: Approximation bestimmter Integrale

Führen Sie für die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2 + 3x}$$

eine komplette Kurvendiskussion durch. Charakterisieren Sie auch das asymptotische Verhalten, und skizzieren Sie den Graphen von  $f$ .



- Nullstellen des Nenners:  $x = 0$ ,  $x = -3$

–  $x = 0$  ist auch Nullstelle des Zählers  $\Rightarrow$

Hebbare Unstetigkeit an  $x = 0$ , und die ‘gekürzte’ Version von  $f(x)$  lautet

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 3} = \frac{(x + 2)^2}{x + 3}$$

–  $x = -3$  ist Pol der Ordnung 1;  $f$  definiert auf  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

- Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{(x + 2)(x + 4)}{(x + 3)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x + 3)^3}$$

- Nullstelle von:

$x = -2$  ist doppelte Nullstelle, da  $f'(-2) = 0$

→

- Lokale Extremalstellen:

$$x = -2 \text{ (lokales Minimum, } f''(-2) > 0)$$

$$x = -4 \text{ (lokales Maximum, } f''(-4) < 0)$$

- Keine Wendepunkte

- Asymptotisches Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$ :

Dies erkennt man am besten mittels Polynomdivision und Partialbruchzerlegung  $\leadsto$

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+3} = x + 1 + O\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) \quad \text{für } x \rightarrow \pm\infty$$

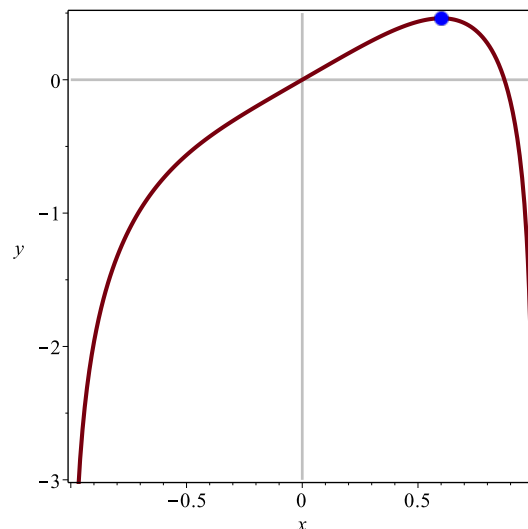
$\Rightarrow$   $x + 1$  ist Asymptote für  $x \rightarrow \infty$  und für  $x \rightarrow -\infty$ .

Führen Sie für die Funktion

$$f(x) = x + \ln(1 - x^4)$$

eine komplette Kurvendiskussion durch. Skizzieren Sie auch den Graphen von  $f$ .

Hinweis: Genaues Augenmerk auf die Lage der Nullstellen von  $f$  und von  $f'$ . Können Sie diese berechnen? Falls nicht, bestimmen Sie eine numerische Approximationen. Hat  $f$  einen Wendepunkt?



- Definitionsbereich:  $f$  definiert als  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$
- Nullstelle:  $x_0 = 0$ , und ??? (siehe unten)
- Asymptotisches Verhalten am Rand von  $(-1, 1)$ :

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

- Ableitungen:

$$f'(x) = 1 - \frac{4x^3}{1-x^4} = \frac{x^4 + 4x^3 - 1}{x^4 - 1}, \quad f''(x) = -\frac{4x^2(x^4 + 3)}{(x^4 - 1)^2}$$

- $f'' \leq 0 \Rightarrow f'$  monoton wachsend
- Asymptotisches Verhalten von  $f'$  am Rand von  $(-1, 1)$ :

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty$$

$\Rightarrow \exists!$  Nullstelle von  $f'$  in  $(-1, 1)$

---

Weiters:  $f'(0) = 1 > 0$  (und  $f(0) = 0$ ):

$\Rightarrow f(x) > 0$  auf Intervall  $(0, \delta)$  rechts von 0 (jedoch  $f(1-) = -\infty$ ):

$\Rightarrow \exists$  weitere Nullstelle von  $f$  in  $(0, 1)$  Wert:<sup>1</sup>  $x \approx 0.874$

und:  $\exists$  lokale Maximalstelle  $x_2$  von  $f$  in  $(0, x_1)$

und:  $\nexists$  Nullstelle von  $f'$  in  $(-1, 0)$

- Nullstellen von  $f'$ :

$$x^4 + 4x^3 - 1 = 0 \quad \leadsto \quad x_2 \approx 0.601 \text{ lokale Maximalstelle}$$

(Die beiden anderen Nullstellen von  $f'$  sind komplex.)

- Untersuchung der Stelle  $x_0 = 0$ : Rechnung ergibt

$$f''(0) = f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = -24 < 0$$

$\Rightarrow f$  ist ‘fast geradlinig’ aber **konkav** in der Nähe von  $x_0 = 0$ .

Anmerkung: Die Gleichung  $f''(0) = 0$  hat nur eine reelle Lösung  $x_0 = 0$ .

$\Rightarrow f$  hat **keine Wendepunkte**.

---

□

---

<sup>1</sup> Berechnet mittels zweier Newton-Schritte für die Gleichung  $f(x) = 0$  ausgehend von  $x = 0.5$

Eine Funktion der Gestalt

$$p(t) = \frac{a}{b + c e^{-\delta t}}, \quad t \geq 0$$

mit Parametern  $a, b, c, \delta > 0$  beschreibt einen zeitabhängigen Sättigungsprozess.

(Die unabhängige Variable  $t \geq 0$  ist hier als Zeit zu interpretieren. Man denke z.B. an das Wachstum einer Population, beginnend mit  $t = 0$ , die für große Zeit  $t \gg 0$  zu stagnieren beginnt.)

- a) [L] Eine einfachere Darstellung der Funktion  $f$  lautet  $p(t) = p_0 g(t)$  mit  $g(t) = 1 / (\dots)$ , wobei wir  $p_0 = p(0)$  als Parameter einführen.
- Geben Sie diese Darstellung an. Wie lautet  $g(t)$ ?
  - Von welchen Parametern  $p_0, \dots$  (im Vergleich zu den ursprünglichen Parametern  $a, b, c, \delta$ ) hängt diese Darstellung ab? Zeigen Sie insbesondere, dass der Prozess durch (nur) drei Parameter  $p_0, \dots$  beschrieben werden kann.
- b) [L] Zeigen Sie, dass  $p$  strikt monoton wachsend ist, und geben Sie den Sättigungswert  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$  an. Interpretieren Sie auch die ‘physikalische’ Bedeutung der Parameter.
- c) [L] (Mit  $p(t) = p_0 g(t)$ :) Zu welchem Zeitpunkt  $t \geq 0$  nimmt  $g'(t)$  am schnellsten zu, und wie lautet der Maximalwert von  $g'$ ?

Hinweis: Fallunterscheidung. Die Bestimmung von  $g''$  erfordert etwas Rechenarbeit. Dass es sich bei einem stationären Punkt von  $g'$  tatsächlich um die globale Maximalstelle von  $g'$  handelt, können Sie entscheiden, ohne  $g'''$  zu berechnen. Überlegen Sie, wie das geht.

- a) Mit  $p_0 = p(0) = \frac{a}{b+c}$  ist

$$p(t) = p_0 \frac{b+c}{b+c e^{-\delta t}} = p_0 \frac{1}{\beta + \gamma e^{-\delta t}} = p_0 g(t),$$

mit

$$\beta = \frac{b}{b+c}, \quad \gamma = \frac{c}{b+c}, \quad \beta + \gamma = 1$$

$\leadsto$

$$p(t) = p_0 \frac{1}{\beta + (1-\beta) e^{-\delta t}} = p_0 g(t)$$

abhängig von den drei Parametern

$$p_0 > 0, \quad \beta \in (0, 1), \quad \delta > 0$$

**b)**  $p$  ist strikt monoton wachsend, da  $e^{-\delta t}$  strikt monoton fallend. ✓

Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \frac{p_0}{\beta}$$

$\leadsto \beta^{-1}$  ist der **Faktor**, um den die Population asymptotisch für  $t \rightarrow \infty$  **zunimmt** im Vergleich zu  $p_0 = p(0)$ .

Der Parameter  $\delta$  charakterisiert die Geschwindigkeit der Sättigung.

**c)** Für die Funktion

$$g(t) = \frac{1}{\beta + (1 - \beta) e^{-\delta t}} \quad (\beta \in (0, 1), \delta > 0)$$

gilt

$$g'(t) = \frac{(1 - \beta) \delta e^{-\delta t}}{(\beta + (1 - \beta) e^{-\delta t})^2} > 0$$

mit

$$g'(0) = (1 - \beta) \delta, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g'(t) = 0$$

Weiters:

$$g''(t) = \dots = - \frac{(1 - \beta) \delta^2 e^{-\delta t} (\beta - (1 - \beta) e^{-\delta t})}{(\beta + (1 - \beta) e^{-\delta t})^3}$$

$\Rightarrow g''(t^*) = 0$  für

$$\beta = (1 - \beta) e^{-\delta t^*} \Leftrightarrow \frac{\beta}{1 - \beta} = e^{-\delta t^*} \Leftrightarrow t^* = \frac{1}{\delta} \ln \left( \frac{1 - \beta}{\beta} \right)$$

Fallunterscheidung:

(i)  $\beta < \frac{1}{2}$ :

$$\frac{1 - \beta}{\beta} > 1 \Rightarrow t^* > 0, \quad \text{mit } g'(t^*) = \frac{\delta}{4\beta} > g'(0)$$

(ii)  $\beta > \frac{1}{2}$ :

$$\frac{1 - \beta}{\beta} < 1 \Rightarrow t^* < 0$$

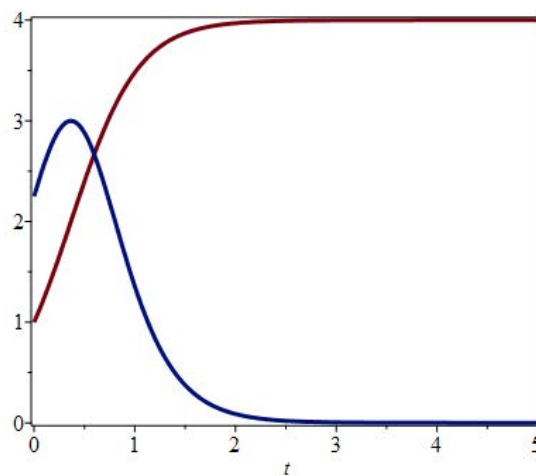
(mit Grenzfall  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $t^* = 0$ ).

(i)  $\beta < \frac{1}{2}$ :

Globales Maximum von  $p'$  an  $t = t^*$ , mit  $g'(t^*) = \frac{\delta}{4\beta}$ ,

wegen  $g'(0) < g'(t^*) > 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} g'(t)$ .

Die Grafik zeigt den Verlauf von  $g(t)$  (rot) und  $p'(t)$  (blau) für den Fall  $\beta = \frac{1}{4}$  und  $\delta = 3$ , mit  $t^* = \frac{1}{3} \ln 3 \approx 0.366$  und  $g'(t^*) = 3$ .



(ii)  $\beta > \frac{1}{2}$ :

$g'(t)$  ist strikt monoton fallend und hat keinen stationären Punkt  $t \geq 0$ . Wegen  $g'(0) > 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} g'(t)$  gilt

$$\max_{t \geq 0} g'(t) = g'(0) = (1 - \beta) \delta$$

Im Grenzfall  $\beta = \frac{1}{2}$  ist  $t^* = 0$ , mit  $g'(0) = \frac{\delta}{2}$ .

Anmerkung: Man rechnet nach, dass  $g(t)$  Lösung der Differentialgleichung

$$g'(t) = \delta g(t) (1 - \beta g(t))$$

ist.

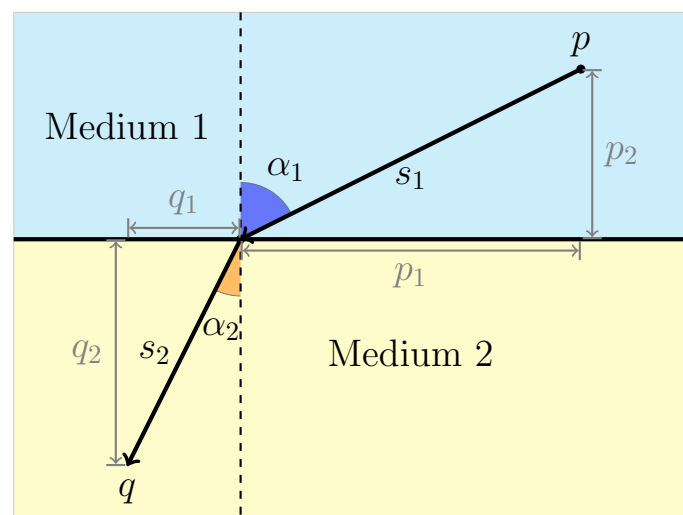


Das *Fermat'sche Prinzip* der Optik besagt, dass Licht stets den Weg kürzester Zeitdauer einschlägt. Wir betrachten den Weg des Lichts zwischen zwei Punkten  $p$  und  $q$  in zwei Medien (z.B. Luft und Vodka) mit unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$ . Innerhalb des jeweiligen Mediums bewegt sich das Licht entlang eines geradlinigen Strahls.

Geben Sie eine Funktion an, die die Dauer von  $p$  nach  $q$  als Funktion  $T(x)$  der Stelle  $x$  laut Grafik angibt, und folgern Sie aus der Minimalitätsbedingung  $T'(x) = 0$  für den Verlauf des Lichtstrahles das *Snellius'sche Brechungsgesetz*

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$\alpha_1, \alpha_2$  laut Grafik. Medium 1 oben, Medium 2 unten;  $x$  ist die waagrechte Koordinate entlang der geradlinigen Grenze zwischen den beiden Medien.



Kartesisches Koordinatensystem  $(x, y)$ :

Die  $x$ -Achse begrenzt die beiden Medien. Gesucht ist die Stelle  $x$ , an der der Lichtstrahl diese Grenze passiert. Mit

$T_1 :=$  Laufzeit in Medium 1 (oben),  $T_2 :=$  Laufzeit in Medium 2 (unten)

gilt für die Gesamtlaufzeit  $T = T_1 + T_2$  mit  $s_1, s_2$  laut Grafik:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2}$$

Kartesische Koordinaten der Endpunkte  $p$  und  $q$ :

$$p = (p_1, p_2), \quad q = (q_1, q_2)$$

$\leadsto$  Mit  $x = x$ -Koordinate des Durchstoßpunktes gilt (Pythagoras)

$$s_1 = \sqrt{(p_1 - x)^2 + p_2^2}, \quad s_2 = \sqrt{(x - q_1)^2 + q_2^2}$$

$\leadsto$  Laufzeit  $T = T(x)$  als Funktion der gesuchten Koordinate  $x$ :

$$T(x) = \frac{1}{c_1} \sqrt{(p_1 - x)^2 + p_2^2} + \frac{1}{c_2} \sqrt{(x - q_1)^2 + q_2^2}$$

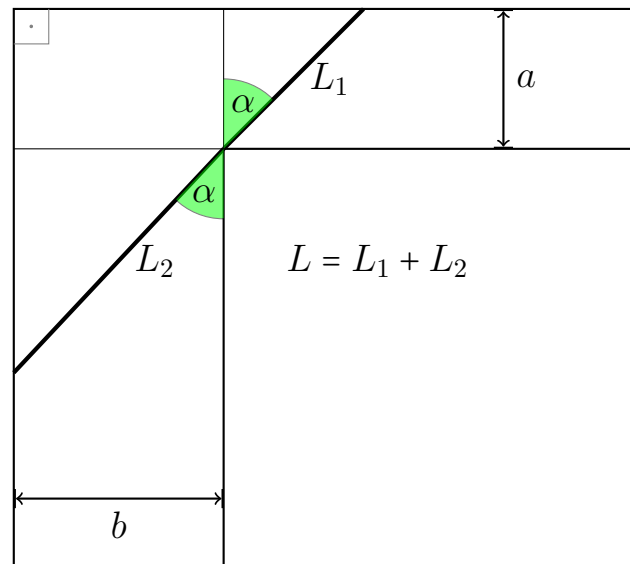
Minimalitätsbedingung erfordert  $T'(x) = 0$ .

$$\begin{aligned} T'(x) &= - \frac{p_1 - x}{c_1 \sqrt{(p_1 - x)^2 + p_2^2}} + \frac{x - q_1}{c_2 \sqrt{(x - q_1)^2 + q_2^2}} \\ &= - \frac{p_1 - x}{c_1 s_1} + \frac{x - q_1}{c_2 s_2} = - \frac{\sin \alpha_1}{c_1} + \frac{\sin \alpha_2}{c_2} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \checkmark$$

Ein dünner langer Baumstamm schwimmt einen Kanal der Breite von  $a$  m Breite entlang. An einer Stelle geht es ums Eck (rechtwinkelige Bauweise,  $90^\circ$ ), und nach dem Eck ist der Kanal  $b$  m breit. Wie lang darf ein Baumstamm höchstens sein, damit er sich im Eck nicht verhakt?



- Breite des Kanals vorgegeben: rechts oben  $a$ , links unten  $b$ .

Gemäß Skizze:

- Baumstamm der Länge  $L = L_1 + L_2$
- Winkel  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  beim Passieren der Ecke

$\leadsto$  Für gegebenen Winkel  $\alpha$  ist

$$L_{\max}(\alpha) = L_1(\alpha) + L_2(\alpha) = a \sec \alpha + b \csc \alpha = \frac{a}{\cos \alpha} + \frac{b}{\sin \alpha}$$

die maximal mögliche Länge, die sich unter dem Winkel  $\alpha$  in die Ecke einpassen lässt.

- $\leadsto$  ‘*minimax - Problem*’:

$\dot{?}$  Für welches  $\alpha = \alpha(a, b)$  wird  $L_{\max}(\alpha)$  minimal?

$\leadsto$  Diskussion der Funktion  $L_{\max}(\alpha)$  (in Abhängigkeit von  $a, b$ ),  
mit

$$L'_{\max}(\alpha) = a \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - b \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$\leadsto$

$$L'_{max}(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \sin(\alpha)^3 = b \cos(\alpha)^3 \quad \Leftrightarrow \quad \tan(\alpha)^3 = \frac{b}{a}$$

$\Rightarrow$

$$\alpha_{min} = \arctan(\rho^{1/3}), \quad \text{mit } \rho = \frac{b}{a}$$

ist (klarerweise) nur abhängig vom Verhältnis  $\rho = b/a$ .

Wegen  $L_{max}(0) = L_{max}(\frac{\pi}{2}) = \infty$  und

$$L''_{max}(\alpha) = a \sec \alpha (1 + 2 \tan^2 \alpha) + b \csc \alpha (1 + 2 \cot^2 \alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$$

ist  $L_{max}(\alpha)$  konvex  $\Rightarrow \alpha_{min}$  ist eindeutige Minimalstelle.

- Globales Minimum der zulässigen Länge als Funktion von  $a$  und  $b$ :

$$\begin{aligned} L_{max}(\alpha_{min}) &= \frac{a}{\cos \alpha_{min}} + \frac{b}{\sin \alpha_{min}} \\ &= \frac{a}{\cos(\arctan(\rho^{1/3}))} + \frac{b}{\sin(\arctan(\rho^{1/3}))} \\ &= a \sqrt{1 + \rho^{2/3}} + b \frac{\sqrt{1 + \rho^{2/3}}}{\rho^{1/3}} \\ &= a \sqrt{1 + \rho^{2/3}} + b \sqrt{1 + \rho^{-2/3}} \end{aligned}$$

Gegeben sei die von einem Parameter  $p > 0$  abhängige Funktion  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^p} - 1}{x}$$

Alles in Abhängigkeit von  $p$ :

- a) [L] Berechnen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ .
- b) [L] Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten für  $x \rightarrow \infty$ .
- c) [L] Für welche Werte von  $p$  ist  $f$  beschränkt?

a) Umformen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^p} - 1}{x} = \frac{(\sqrt{1+x^p} - 1)(\sqrt{1+x^p} + 1)}{x(\sqrt{1+x^p} + 1)} \\ &= \frac{(1+x^p) - 1}{x(\sqrt{1+x^p} + 1)} = \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1+x^p} + 1} \end{aligned}$$

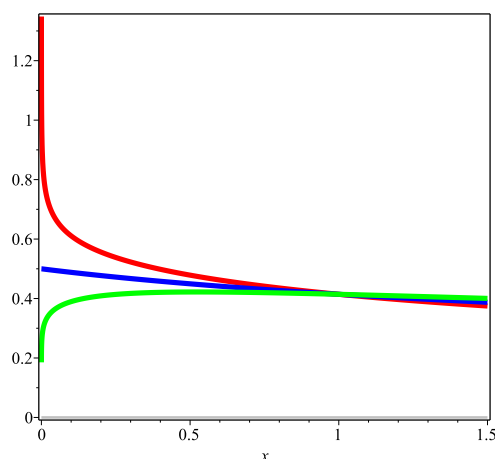
Oder de l'Hôpital anwenden ('0/0'), mit

$$\frac{\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^p} - 1)}{\frac{d}{dx}x} = \frac{\frac{1}{2}p x^{p-1} (1+x^p)^{-\frac{1}{2}}}{1}$$

$\Rightarrow$  mit  $x^p \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \begin{cases} \infty, & 0 < p < 1 \\ \frac{1}{2}, & p = 1 \\ 0, & p > 1 \end{cases}$$

Grafik:  $p = 0.9$  /  $1.0$  /  $1.1$



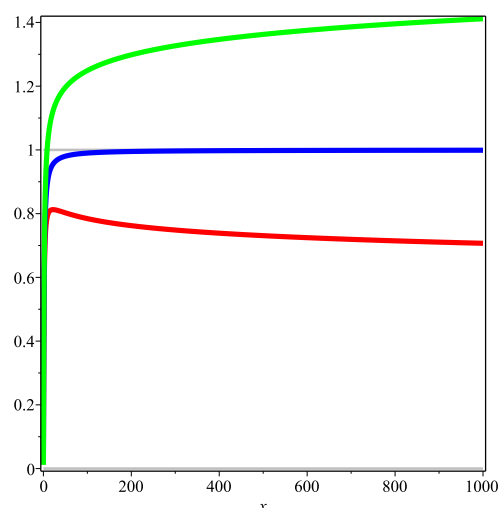
b) Mit  $x^p \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ , und

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^p} - 1}{x} = \underbrace{\frac{\sqrt{x^p}}{x}}_{= x^{\frac{p}{2}-1}} \underbrace{\left( \sqrt{1+x^{-p}} - \sqrt{x^{-p}} \right)}_{\rightarrow 1}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{p}{2}-1} = \begin{cases} 0, & 0 < p < 2 \\ 1, & p = 2 \\ \infty, & p > 2 \end{cases}$$

Grafik:  $p = 1.9 / 2.0 / 2.1$

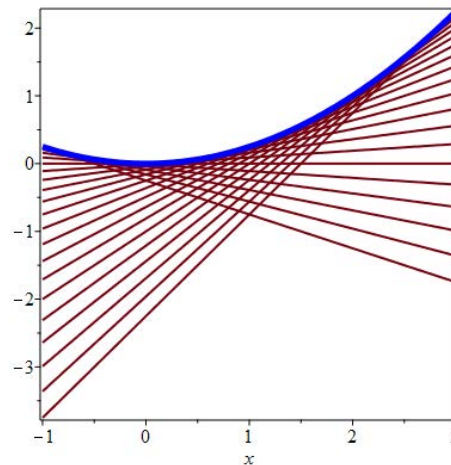


c)  $f$  ist stetig auf  $(0, \infty)$ .

a) & b)  $\Rightarrow$

$f$  ist beschränkt für  $1 \leq p \leq 2$ .

Die Grafik zeigt eine Schar von Funktionsgraphen  $f(x; t)$  (Kurven, in diesem Fall Geraden, abhängig von einem Parameter  $t \in \mathbb{R}$ ) und ihre *einhiüllende Kurve*. Die Einhüllende ist der Graph einer Funktion  $h(x)$ , die in jedem Punkt  $(x_0, h(x_0))$  genau einen der Funktionsgraphen  $f(x; t_0)$  berührt.



Für alle  $x_0$  aus einem gewissen Intervall gilt also: Es gibt genau einen Parameterwert  $t_0$  mit

$$h(x_0) = f(x_0; t_0) \quad \text{und} \quad h'(x_0) = f'(x_0; t_0)$$

Ein einfaches Beispiel:

a) [L] Betrachten Sie die Funktion  $h(x) = x^2/4$  und bestimmen Sie an jeder Stelle  $x_0$  in  $\mathbb{R}$  die Tangente an den Graphen von  $h$ . Dies ergibt eine Schar von Geraden, abhängig von dem Parameter  $x_0$ . Argumentieren Sie, warum diese Geraden unterhalb des Graphen von  $h(x)$  verlaufen.

b) [L] Sei umgekehrt die Schar von Geraden  $f(x; t) = tx - x^2$  gegeben. Wir versuchen nun die Einhüllende  $h(x)$  dieser Geradenschar zu bestimmen, wobei wir erwarten (siehe Grafik), dass sich  $h(x)$  'von oben anschmiegt'. Wir gehen wir folgt vor:

- Zu jedem  $x_0 \in \mathbb{R}$  betrachten wir  $g(t) := f(x_0, t)$  als Funktion von  $t$  und bestimmen

$$t_0 = \arg \max_{t \in \mathbb{R}} f(x_0; t)$$

d.h., denjenigen Wert von  $t$ , für den  $f(x_0; t)$  maximal ist.

- Für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$h(x_0) := f(x_0; t_0)$$

und verifizieren, dass die so definierte Funktion  $h(x)$  tatsächlich eine Einhüllende der gegebenen Kurvenschar ist.

Bestimmen Sie  $h(x)$  für die gegebene Geradenschar  $f(x; t)$ .

**a)** Für alle  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist

$$\begin{aligned} h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) &= \frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0}{2}(x - x_0) \\ &= t_0 x - t_0^2 \quad \text{mit } t_0 = \frac{x_0}{2} \end{aligned}$$

die Tangente an den Graphen von  $h(x)$  an der Stelle  $x_0$ . Alle diese Tangenten verlaufen unterhalb des Graphen von  $h(x)$ , weil  $h(x)$  **konvex** ist:  $h''(x) \equiv \frac{1}{2} > 0$ , und daher (nach dem Satz von Taylor)

$$h(x) > h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)$$

**b)** Für  $f(x; t) = t x - t^2$  und festes  $x_0$  wird<sup>2</sup>

$$\frac{d}{dt} f(x_0; t) = x_0 - 2t = 0 \quad \text{für } t_0 = \frac{x_0}{2}$$

$\Rightarrow f(x_0; t)$  maximal an der Stelle  $t_0$ . (Beachte  $\frac{d^2}{dt^2} f(x_0; t) = -2 < 0$ .)

$\Rightarrow$

$$h(x_0) = f(x_0; t_0) = \frac{x_0}{2} x_0 - \frac{x_0^2}{4} = \frac{x_0^2}{4}$$

Also ist

$$h(x) = \frac{x^2}{4}$$

genau die Einhüllende der gegebenen Geradenschar  $f(x; t)$ , wie die Rechnung ‘in umgekehrter Richtung’ aus **a)** zeigt.

□

<sup>2</sup> Eigentlich ist das die partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial t}$  der Funktion  $f(x; t)$  nach der zweiten Variablen  $t$ .



Sei  $x^*$  die Lösung einer Gleichung  $f(x) = 0$ , d.h.,  $x^* = \varphi(0)$ , wobei  $\varphi := f^{-1}$  die Umkehrfunktion von  $f$  bezeichnet. (Dabei wird Injektivität von  $f$  in der Nähe von  $x^*$  angenommen.)

- a) [\[L\]](#) Die Newton-Iteration  $x_i \mapsto x_{i+1}$  zur Approximation von  $x^*$  basiert auf Linearisierung von  $f$  an  $x = x_i$ , d.h., man bestimmt den Schnittpunkt  $x_{i+1}$  der Tangente an den Graphen von  $f$  an der Stelle  $(x_i, f(x_i))$  mit der  $x$ -Achse.

Man kann dies auch so deuten: Die Linearisierung der Umkehrfunktion  $\varphi(y)$  an der Stelle  $y_i = f(x_i)$  lautet

$$\varphi(y) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(y - y_i)$$

also:  $x^* = \varphi(0) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(0 - y_i) =: \tilde{x}_{i+1}$

Zeigen sie, dass das so definierte  $\tilde{x}_{i+1}$  tatsächlich mit dem Ergebnis des  $x_{i+1}$  des Newton-Schrittes  $x_i \mapsto x_{i+1}$  identisch ist.

- b) [\[L\]](#) Die letztere Denkweise erlaubt es, ein verbessertes Newton-Verfahren zu konstruieren, unter Verwendung von  $f''$ : Man approximiert  $\varphi(y)$  durch ihr Taylorpolynom zweiten (ggf. auch höheren) Grades:

$$\varphi(y) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(y - y_i) + \frac{1}{2} \varphi''(y_i)(y - y_i)^2$$

also:  $x^* = \varphi(0) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(0 - y_i) + \frac{1}{2} \varphi''(y_i)(y_i - 0)^2 =: x_{i+1}$

Zeigen Sie, dass dies auf ein verbessertes Newton-Verfahren in folgender Gestalt führt:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{f(x_i) f''(x_i)}{f'(x_i)^2} \right)$$

a)  $y_i = f(x_i)$ ,  $\varphi(y_i) = x_i$ , und  $\varphi'(y_i) = \frac{1}{f'(x_i)}$

Ableitung der Umkehrfunktion

$\leadsto$

$$\tilde{x}_{i+1} = \varphi(y_i) - \varphi'(y_i) y_i = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_{i+1} \quad \checkmark$$

- b) (Nochmals erste und) zweite Ableitung der Umkehrfunktion  $\varphi = f^{-1}$ :  
Aus

$$x = \varphi(f(x))$$

folgt

$$1 = \frac{d}{dx} \varphi(f(x)) = \varphi'(f(x)) f'(x) \Rightarrow \varphi'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

und weiter

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2}{dx^2} \varphi(f(x)) = \frac{d}{dx} (\varphi'(f(x)) f'(x)) \\ &= \varphi''(f(x)) f'(x)^2 + \varphi'(f(x)) f''(x) \\ &= \varphi''(f(x)) f'(x)^2 + \frac{f''(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\varphi''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{f'(x)^3}$$

$\leadsto$  verbessertes Newton-Verfahren:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \varphi(y_i) - \varphi'(y_i) y_i + \frac{1}{2} \varphi''(y_i) y_i^2 \\ &= x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)^3} f(x_i)^2 \\ &= x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{f(x_i) f''(x_i)}{f'(x_i)^2} \right) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Gegeben sei die von dem Parameter  $n \in \mathbb{N}$  abhängige Folge von Funktionen

$$f_n: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}$$

Offenbar gilt  $f_n(x) \geq 0$  und  $f_n(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) [\[L\]](#) Zeigen Sie: Die  $f_n$  sind gleichmäßig beschränkt, d.h., es gibt eine Konstante  $K$  mit  $f_n(x) \leq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x \geq 0$ . Wird die Konstante  $K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  von  $f_n$  als Funktionswert angenommen, bzw. an welchen Stellen?

Hinweis: Eine kleine Kurvendiskussion in Abhängigkeit von  $n$ . Argumentieren Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung  $f_n''$  (überlegen Sie, wie).

- b) [\[L\]](#) Die arithmetischen Mittel der  $f_n(x)$ ,

$$\bar{f}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

haben das gleiche asymptotische Verhalten wie die  $f_n(x)$ , sie sind laut Konstruktion gleichmäßig beschränkt durch  $K$  gemäß a), aber sie sind nicht so einfach zu analysieren.

Geben Sie (in Abhängigkeit von  $n$ ) Stellen  $x_n$  an, so dass  $\bar{f}_n(x)$  für  $x > x_n$  garantiert strikt monoton fallend ist.

- a) Am bequemsten so:

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x} = \frac{x^n e^{-x}}{n^n e^{-n}}$$

Betrachte  $g_n(x) = x^n e^{-x}$ , mit Ableitung

$$g'_n(x) = (n x^{n-1} - x^n) e^{-x} \quad (\text{X})$$

$\Rightarrow f'_n(x) = g'_n(x) = 0$  für  $x = n$ , mit Funktionswert

$$g_n(n) = n^n e^{-n} \Rightarrow f_n(n) = 1$$

Zusammen mit  $f_n(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \leadsto$

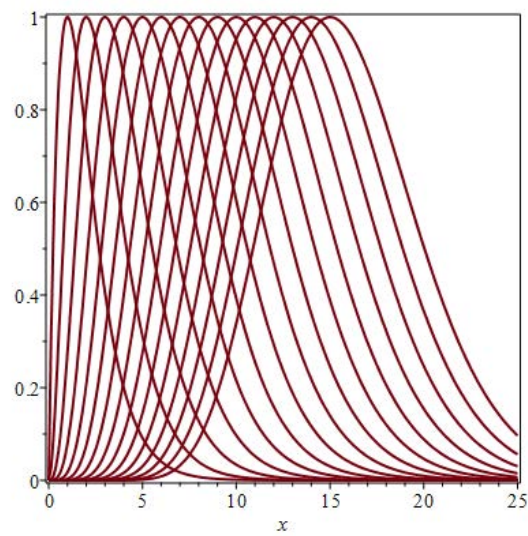
$n > 0$  (eindeutige) globale max-Stelle von  $f_n$  mit  $f_n(n) = 1 \Rightarrow K = 1$

- b) (X)  $\Rightarrow$

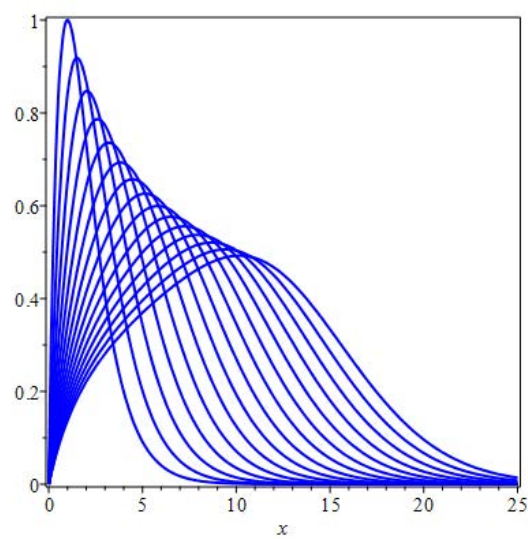
$$f'_k(x) < 0 \quad \text{für } x > n, \quad k = 1 \dots n$$

$$\Rightarrow x_n = n$$

Die Funktionen  $f_n(x)$  :



Die Funktionen  $\bar{f}_n(x)$  :



Für bestimmte Integrale, die sich nicht exakt mittels Stammfunktionen berechnen lassen, verwendet man numerische Näherungsformeln. Wir betrachten die einfachste derartige Formel über einem Integrationsintervall  $[a, b]$ . Der Integrand  $f(x)$  wird als stetig differenzierbar vorausgesetzt.

a) [\[L\]](#) Geben Sie für den Fehler  $R(f; a, b) - I(f; a, b)$  der *Rechtecksformel*

$$R(f; a, b) := (b - a) f(a) \approx I(f; a, b) := \int_a^b f(x) dx$$

eine formelmäßige Darstellung an, die von  $f'(\xi)$  (für ein  $\xi \in [a, b]$ ) abhängt. In welcher Weise hängt der Fehler von der Intervalllänge  $b - a$  ab?

Für welche Integranden liefert die Rechteckformel das exakte Ergebnis?

b) [\[L\]](#) Wir denken uns das Intervall  $[a, b]$  in  $n$  gleich lange Teilintervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1 \dots n$ , unterteilt, mit den ‘Gitterpunkten’

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad \dots, \quad x_{n-1} = b - h, \quad x_n = b, \quad (h = 1/n).$$

Auf jedes der Teilintervalle wenden wir die Rechtecksformel  $R(f; x_{i-1}, x_i)$  an und summieren auf. Das Ergebnis, die *summierte Rechtecksformel*, eine Riemann-Summe über der gewählten Unterteilung. Wir bezeichnen sie mit  $R_\Sigma(f; a, b)$ .

Geben Sie für den Fehler der summierten Rechtecksformel eine Abschätzung der Form

$$|R_\Sigma(f; a, b) - I(f; a, b)| \leq C h^p \max_{\xi \in [a, b]} |f'(\xi)|$$

an. Wie lautet der Wert für die ‘Konvergenzordnung’  $p$ , und welche Konstante  $C$  tritt in der Abschätzung auf?

a) 1. MWS der Integralrechnung  $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in [a, b]$$

$$\Rightarrow R(f; a, b) - I(f; a, b) = (b - a) (f(a) - f(\xi)), \quad \xi \in [a, b]$$

und weiter (mittels 1. MWS der Differentialrechnung für  $f$ ):

$$R(f; a, b) - I(f; a, b) = (b - a)(a - \xi) f'(\eta), \quad \eta \in (a, \xi) \subseteq [a, b]$$

$\Rightarrow$  Fehlerabschätzung:

$$|R(f; a, b) - I(f; a, b)| \leq (b - a)^2 \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

Die Rechtecksformel ist exakt nur für konstante Funktionen.

**b)** Gemäß **a)** gilt für alle Teilintervalle  $x_{i-1}, x_i$ :

$$|R(f; x_{i-1}, x_i) - I(f; x_{i-1}, x_i)| \leq h^2 \max_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} |f'(\xi)|$$

$\Rightarrow$  mit  $h = 1/n$ :

$$\begin{aligned} |R_{\Sigma}(f; a, b) - I(f; a, b)| &= \left| \sum_{i=1}^n R(f; x_{i-1}, x_i) - I(f; x_{i-1}, x_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |R(f; x_{i-1}, x_i) - I(f; x_{i-1}, x_i)| \\ &\leq n h^2 \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| = h \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \end{aligned}$$

Die summierte Rechteckformel hat die Konvergenzordnung  $p = 1$ .

Anmerkung: Es gibt bessere Näherungsverfahren, z.B. die [summierte] *Trapezformel*, basierend auf (siehe Abbildung, exakt für affine Funktionen),

$$T(f; a, b) := \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) \approx I(f; a, b)$$

Die summierte Trapezformel  $T_{\Sigma}(f; a, b)$  hat die Konvergenzordnung  $p = 2$  für mindestens zweimal stetig differenzierbare Integranden. (Analyse ähnlich wie für die Rechteckformel.)

