Aufgaben zu Kapitel 10, 11 und (ein wenig) 12

Führen Sie für die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 4\,x^2 + 4\,x}{x^2 + 3\,x}$$

eine komplette Kurvendiskussion durch. Charakterisieren Sie auch das asymptotische Verhalten, und skizzieren Sie den Graphen von f.

Führen Sie für die Funktion

$$f(x) = x + \ln(1 - x^4)$$

eine komplette Kurvendiskussion durch. Skizzieren Sie auch den Graphen von f.

Hinweis: Genaues Augenmerk auf die Lage der Nullstellen von f und von f'. Können Sie diese berechnen? Falls nicht, bestimmen Sie eine numerische Approximationen. Hat f einen Wendepunkt?

Eine Funktion der Gestalt

$$p(t) = \frac{a}{b + c\,e^{-\delta t}}\,, \quad t \ge 0$$

mit Parametern $a, b, c, \delta > 0$ beschreibt einen zeitabhängigen Sättigungsprozess.

(Die unabhängige Variable $t \ge 0$ ist hier als Zeit zu interpretieren. Man denke z.B. an das Wachstum einer Population, beginnend mit $t = 0$, die für große Zeit $t \gg 0$ zu stagnieren beginnt.)

a) Eine einfachere Darstellung der Funktion f lautet $p(t) = p_0\, g(t)$ mit $g(t) = 1\,/\,(\,\cdots)\,$, wobei wir $p_0 = p(0)$ als Parameter einführen.

- Geben Sie diese Darstellung an. Wie lautet $g(t)$?
- Von welchen Parametern $p_0, \ldots$ (im Vergleich zu den ursprünglichen Parametern a, b, c, δ) hängt diese Darstellung ab? Zeigen Sie insbesondere, dass der Prozess durch (nur) drei Parameter $p_0, \ldots$ beschrieben werden kann.

b) Zeigen Sie, dass p strikt monoton wachsend ist, und geben Sie den Sättigungswert $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)$ an. Interpretieren Sie auch die 'physikalische' Bedeutung der Parameter.

c) (Mit $p(t) = p_0\, g(t)$:) Zu welchem Zeitpunkt $t \ge 0$ nimmt $g'(t)$ am schnellsten zu, und wie lautet der Maximalwert von g'?

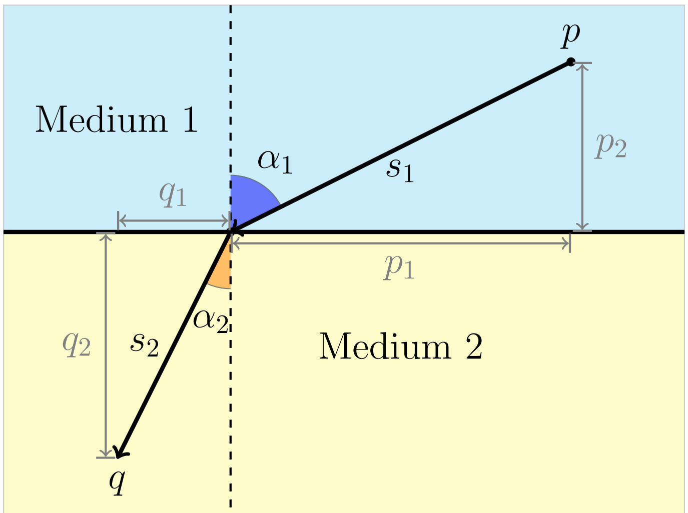
Hinweis: Fallunterscheidung. Die Bestimmung von g'' erfordert etwas Rechenarbeit. Dass es sich bei einem stationären Punkt von g' tatsächlich um die globale Maximalstelle von g' handelt, können Sie entscheiden, ohne g''' zu berechnen. Überlegen Sie, wie das geht.

Das *Fermat'sche Prinzip* der Optik besagt, dass Licht stets den Weg kürzester Zeitdauer einschlägt. Wir betrachten den Weg des Lichts zwischen zwei Punkten p und q in zwei Medien (z.B. Luft und Vodka) mit unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten c_1 und c_2. Innerhalb des jeweiligen Mediums bewegt sich das Licht entlang eines geradlinigen Strahls.

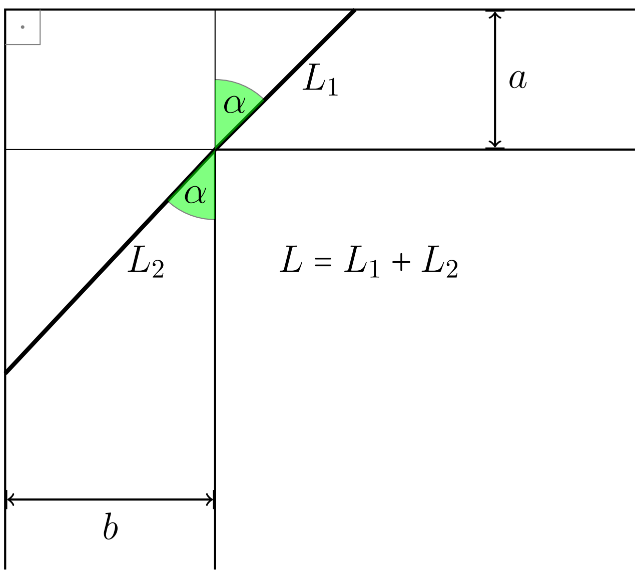
Geben Sie eine Funktion an, die die Dauer von p nach q als Funktion $T(x)$ der Stelle x laut Grafik angibt, und folgern Sie aus der Minimalitätsbedingung $T'(x) = 0$ für den Verlauf des Lichtstrahles das *Snellius'sche Brechungsgesetz*

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

α_1, α_2 laut Grafik. Medium 1 oben, Medium 2 unten; x ist die waagrechte Koordinate entlang der geradlinigen Grenze zwischen den beiden Medien.



Ein dünner langer Baumstamm schwimmt einen Kanal der Breite von a m Breite entlang. An einer Stelle geht es ums Eck (rechtwinkelige Bauweise, 90°), und nach dem Eck ist der Kanal b m breit. Wie lang darf ein Baumstamm höchstens sein, damit er sich im Eck nicht verhakt?



Gegeben sei die von einem Parameter $p > 0$ abhängige Funktion $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^p} - 1}{x}$$

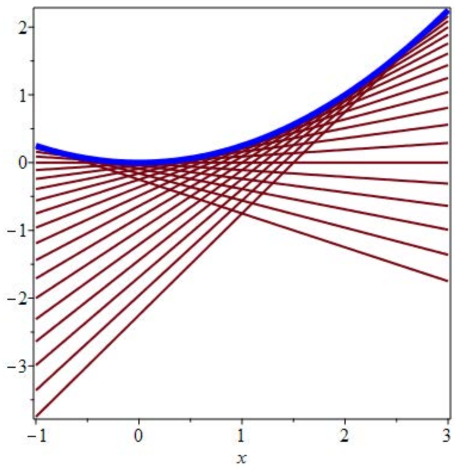
Alles in Abhängigkeit von p:

a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$.

b) Untersuchen Sie die das aymptotische Verhalten für $x \to \infty$.

c) Für welche Werte von p ist f beschränkt?

Die Grafik zeigt eine Schar von Funktionsgraphen $f(x;t)$ (Kurven, in diesem Fall Geraden, abhängig von einem Parameter $t \in \mathbb{R}$) und ihre *einhüllende Kurve.* Die Einhüllende ist der Graph einer Funktion $h(x)$, die in jedem Punkt $(x_0, h(x_0))$ genau einen der Funktionsgraphen $f(x;t_0)$ berührt.



Für alle x_0 aus einem gewissen Intervall gilt also: Es gibt genau einen Parameterwert t_0 mit

$$h(x_0) = f(x_0;t_0) \quad \text{und} \quad h'(x_0) = f'(x_0;t_0)$$

Ein einfaches Beispiel:

a) Betrachten Sie die Funktion $h(x) = x^2/4$ und bestimmen Sie an jeder Stelle x_0 in $\mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von h. Dies ergibt eine Schar von Geraden, abhängig von dem Parameter x_0. Argumentieren Sie, warum diese Geraden unterhalb des Graphen von $h(x)$ verlaufen.

b) Sei umgekehrt die Schar von Geraden $f(x;t) = t\,x - x^2$ gegeben. Wir versuchen nun die Einhüllende $h(x)$ dieser Geradenschar zu bestimmen, wobei wir erwarten (siehe Grafik), dass sich $h(x)$ 'von oben anschmiegt'. Wir gehen wir folgt vor:

- Zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir $g(t) := f(x_0, t)$ als Funktion von t und bestimmen
$$t_0 = \arg\max_{t \in \mathbb{R}} f(x_0;t)$$
d.h., denjenigen Wert von t, für den $f(x_0;t)$ maximal ist.
- Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ definieren wir
$$h(x_0) := f(x_0;t_0)$$
und verifizieren, dass die so definierte Funktion $h(x)$ tatsächlich eine Einhüllende der gegebenen Kurvenschar ist.

Bestimmen Sie $h(x)$ für die gegebene Geradenschar $f(x;t)$.

Sei x^* die Lösung einer Gleichung $f(x) = 0$, d.h., $x^* = \varphi(0)$, wobei $\varphi := f^{-1}$ die Umkehrfunktion von f bezeichnet. (Dabei wird Injektivität von f in der Nähe von x^* angenommen.)

a) Die Newton-Iteration $x_i \mapsto x_{i+1}$ zur Approximation von x^* basiert auf Linearisierung von f an $x = x_i$, d.h., man bestimmt den Schnittpunkt x_{i+1} der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $(x_i, f(x_i))$ mit der x - Achse.

Man kann dies auch so deuten: Die Linearisierung der Umkehrfunktion $\varphi(y)$ an der Stelle $y_i = f(x_i)$ lautet

$$\begin{aligned} & \varphi(y) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(y - y_i) \\ \text{also:} \quad & x^* = \varphi(0) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(0 - y_i) =: \tilde{x}_{i+1} \end{aligned}$$

Zeigen sie, dass das so definierte $\tilde{x}_{i+1}$ tatsächlich mit dem Ergebnis des x_{i+1} des Newton-Schrittes $x_i \mapsto x_{i+1}$ identisch ist.

b) Die letztere Denkweise erlaubt es, ein verbessertes Newton-Verfahren zu konstruieren, unter Verwendung von f'': Man approximiert $\varphi(y)$ durch ihr Taylorpolynom zweiten (ggf. auch höheren) Grades:

$$\begin{aligned} & \varphi(y) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(y - y_i) + \tfrac{1}{2}\varphi''(y_i)(y - y_i)^2 \\ \text{also:} \quad & x^* = \varphi(0) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(0 - y_i) + \tfrac{1}{2}\varphi''(y_i)\,(y_i - 0)^2 =: x_{i+1} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dies auf ein verbessertes Newton-Verfahren in folgender Gestalt führt:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{f(x_i)\,f''(x_i)}{f'(x_i)^2}\right)$$

Gegeben sei die von dem Parameter $n \in \mathbb{N}$ abhängige Folge von Funktionen

$$f_n\colon [0,\infty) \to [0,\infty), \quad f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}$$

Offenbar gilt $f_n(x) \geq 0$ und $f_n(0) = \lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie: Die f_n sind gleichmäßig beschränkt, d.h., es gibt eine Konstante K mit $f_n(x) \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \geq 0$. Wird die Konstante K für alle $n \in \mathbb{N}$ von f_n als Funktionswert angenommen, bzw. an welchen Stellen?

Hinweis: Eine kleine Kurvendiskussion in Abhängigkeit von n. Argumentieren Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung f_n'' (überlegen Sie, wie).

b) Die arithmetischen Mittel der $f_n(x)$,

$$\bar{f}_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

haben das gleiche asymptotische Verhalten wie die $f_n(x)$, sie sind laut Konstruktion gleichmäßig beschränkt durch K gemäß **a)**, aber sie sind nicht so einfach zu analysieren.

Geben Sie (in Abhängigkeit von n) Stellen x_n an, so dass $\bar{f}_n(x)$ für $x > x_n$ garantiert strikt monoton fallend ist.

Für bestimmte Integrale, die sich nicht exakt mittels Stammfunktionen berechnen lassen, verwendet man numerische Näherungsformeln. Wir betrachten die einfachste derartige Formel über einem Integrationsintervall $[a, b]$. Der Integrand $f(x)$ wird als stetig differenzierbar vorausgesetzt.

a) Geben Sie für den Fehler $R(f; a, b) - I(f; a, b)$ der *Rechtecksformel*

$$R(f; a, b) := (b - a)\, f(a) \approx I(f; a, b) := \int_a^b f(x)\, dx$$

eine formelmäßige Darstellung an, die von $f'(\xi)$ (für ein $\xi \in [a, b]$) abhängt. In welcher Weise hängt der Fehler von der Intervalllänge $b - a$ ab?

Für welche Integranden liefert die Rechteckformel das exakte Ergebnis?

b) Wir denken uns das Intervall $[a, b]$ in n gleich lange Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \ldots n$, unterteilt, mit den ‘Gitterpunkten’

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ \ldots,\ x_{n-1} = b - h,\ x_n = b, \quad (h = 1/n).$$

Auf jedes der Teilintervalle wenden wir die Rechtecksformel $R(f; x_{i-1}, x_i)$ an und summieren auf. Das Ergebnis, die *summierte Rechtecksformel*, eine Riemann-Summe über der gewählten Unterteilung. Wir bezeichnen sie mit $R_\Sigma(f; a, b)$.

Geben Sie für den Fehler der summierten Rechtecksformel eine Abschätzung der Form

$$\left| R_\Sigma(f; a, b) - I(f; a, b) \right| \le C\, h^p \max_{\xi \in [a,b]} |f'(\xi)|$$

an. Wie lautet der Wert für die ‘Konvergenzordnung’ p, und welche Konstante C tritt in der Abschätzung auf?