Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2019/20

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Übungstest (MO, 11.11.2019) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{1.\overline{02}}$ *unter Verwendung einer geometrischen Reihe* in rationale Darstellung um. *[a): 2.5 P.]*

$$
\begin{aligned}
1.\overline{02} &= 1 + \frac{2}{100} + \frac{2}{10000} + \dots \\
&= 1 + 2\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n \\
&= 1 + 2\,\frac{1/100}{1 - 1/100} = 1 + 2\,\frac{1}{99} = \frac{101}{99}
\end{aligned}
$$

b) Sei $0 \le k < n$. Geben Sie einen *expliziten Formelausdruck* an für den Wert von $\boxed{\binom{n+1}{k} \Big/ \binom{n}{k+1}}$

(Hinweis: Vereinfachen Sie dies basierend auf der Definition des Binomialkoeffizienten.) *[b): 1.5 P.]*

$$
\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}}{\dfrac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}} = \frac{(n+1)!\,(k+1)!\,(n-k-1)!}{n!\,k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)(k+1)}{(n-k)(n-k+1)}
$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Drücken Sie den Wert von $\boxed{\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1}}$ mittels eines *Binomialkoeffizienten* aus. *[c): 2 P.]*

Hinweis: Sie sollen hier nicht Induktion verwenden, sondern einfach das 'Muster' richtig erkennen.

$$
\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1} = \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdots\frac{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)!\,/\,2}{(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}
$$

d) Beweisen Sie Ihr Resultat aus c) mittels *Induktion* (Induktionsanfang bei $n = 1$). *[d): 1 **Extra**-P.]*

- Induktionsanfang ($n = 1$): leeres Produkt $= 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$
\prod_{k=2}^{n+1} \frac{k+1}{k-1} \overset{\text{ind}}{=} \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n+2}{n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \binom{n+2}{2} \quad ✓
$$

- **Aufgabe 2.**

a) Berechnen Sie den Wert der Summe $\boxed{\sum_{k=0}^{n} 2^k\, 3^{n-k}}$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Das Ergebnis ist als *Differenz zweier natürlicher Zahlen* darzustellen. *[a): 2 P.]*

Umformen in geometrische Summe:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k\, 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3^n \, \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3} - 3^n}{-\frac{1}{3}} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

b) Zeigen Sie mittels *Induktion*, dass die Zahl $\boxed{6^n - 1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar ist. *[b): 2.5 P.]*

- Induktionsanfang ($n = 1$): $6^1 - 1 = 5$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n + 1$:

$$\begin{aligned} 6^{n+1} - 1 &= \left(6^{n+1} - 6^n\right) + \left(6^n - 1\right) \\ &= (6-1)\, 6^n + \left(6^n - 1\right) \\ &\overset{\text{ind}}{=} 5 \cdot 6^n + 5\,k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $6^{n+1} - 1$ ist ebenfalls durch 5 teilbar. ✓

c) Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_{n-1}\,, \quad n > 1}$

Entscheiden Sie, ob die Folge $\{a_n\}$ eine Nullfolge ist. Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent? [c): 1.5 P.]

Anmerkung: Ein bisschen rechnen, dann erkennt man es. (Streng formal gesehen ist das ein — sehr einfaches — Induktionsargument.)

Es gilt

$$a_2 = \frac{1}{2}\, a_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad a_3 = \frac{2}{3}\, a_2 = \frac{1}{3}\,, \qquad a_4 = \frac{3}{4}\, a_3 = \frac{1}{4}\,, \qquad \text{usw.}$$

Also mittels offensichtlichem Induktionsargument:

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \quad \text{ist Nullfolge.}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent (harmonische Reihe).

- **Aufgabe 3.**

a) Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n\, n!}}$ *[a): 2.5 P.]*

Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}\,(n+1)!}}{\frac{n^n}{2^n\,n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1)\, 2^n\, n!}{n^n\, 2^{n+1} (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1 \Rightarrow \text{Divergenz}$$

b) Untersuchen Sie die Funktion $\boxed{f\colon \mathbb{N} \to B\,, \quad f(n) = \frac{n-1}{n+1}}$ auf *Injektivität* und *Surjektivität*.

(Hier bezeichnet B die Menge aller rationalen Zahlen $b \in [0,1]$.) *[b): 3.5 P.]*

- f ist injektiv:

$$\begin{aligned} f(n) = f(m) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{n+1} = \frac{m-1}{m+1} \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)(m+1) = (m-1)(n+1) \\ &\Leftrightarrow \quad (n-1)(m+1) = (m-1)(n+1) \\ &\Leftrightarrow \quad nm + n - m - 1 = mn + m - n - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad n - m = m - n \quad \Leftrightarrow \quad n - m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = m \end{aligned}$$

  - Oder: Man argumentiert, dass f strikt monoton wachsend ist, d.h.,

$$f(n+1) = \frac{n}{n+2} > \frac{n-1}{n+1} = f(n)$$

    wegen

$$\underbrace{n(n+1)}_{n^2+n} > \underbrace{(n-1)(n+2)}_{n^2+n-2}$$

  - Oder ganz direkt:

$$f(n) = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \quad \text{strikt monoton wachsend.}$$

- f ist nicht surjektiv, da nicht alle $b \in B$ als Funktionswert auftreten, z.B. $b = 1$.

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Übungstest (MO, 11.11.2019) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Untersuchen Sie die Funktion $\boxed{g\colon \mathbb{N} \to A\,, \quad g(n) \;=\; \frac{n-1}{n+1}}$ auf *Injektivität* und *Surjektivität*.

(Hier bezeichnet A die Menge aller rationalen Zahlen $a \in [0,1]$.) *[a): 3.5 P.]*

- f ist injektiv:

$$\begin{aligned} g(n) = g(m) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{n+1} = \frac{m-1}{m+1} \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)(m+1) \;=\; (m-1)(n+1) \\ &\Leftrightarrow \quad (n-1)(m+1) \;=\; (m-1)(n+1) \\ &\Leftrightarrow \quad nm + n - m - 1 \;=\; mn + m - n - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad n - m \;=\; m - n \quad \Leftrightarrow \quad n - m \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; n = m \end{aligned}$$

  – Oder: Man argumentiert, dass g strikt monoton wachsend ist, d.h.,

$$g(n+1) \;=\; \frac{n}{n+2} \;>\; \frac{n-1}{n+1} \;=\; g(n)$$

  wegen

$$\underbrace{n(n+1)}_{n^2+n} \;>\; \underbrace{(n-1)(n+2)}_{n^2+n-2}$$

  – Oder ganz direkt:

$$g(n) \;=\; \frac{n+1-2}{n+1} \;=\; 1 - \frac{2}{n+1} \quad \text{strikt monoton wachsend.}$$

- g ist nicht surjektiv, da nicht alle $a \in A$ als Funktionswert auftreten, z.B. $a = 1$.

b) Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{3^k\,k!}}$ *[b): 2.5 P.]*

Quotientenkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{(k+1)^{k+1}}{3^{k+1}\,(k+1)!}}{\dfrac{k^k}{3^k\,k!}} \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k(k+1)\,3^k\,k!}{k^k\,3^{k+1}(k+1)!} \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \;=\; \frac{e}{3} < 1 \;\Rightarrow\; \text{Konvergenz}$$

- **Aufgabe 2.**

a) Sei $0 \leq m < n$. Geben Sie einen *expliziten Formelausdruck* an für den Wert von $\boxed{\binom{n+1}{m} \Big/ \binom{n}{m+1}}$

(Hinweis: Vereinfachen Sie dies basierend auf der Definition des Binomialkoeffizienten.) *[a): 1.5 P.]*

$$\frac{\binom{n+1}{m}}{\binom{n}{m+1}} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{m!\,(n+1-m)!}}{\dfrac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!}} = \frac{(n+1)!\,(m+1)!\,(n-m-1)!}{n!\,m!\,(n-m+1)!} = \frac{(n+1)(m+1)}{(n-m)(n-m+1)}$$

b) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{1.\overline{03}}$ *unter Verwendung einer geometrischen Reihe* in rationale Darstellung um. *[b): 2.5 P.]*

$$\begin{aligned} 1.\overline{03} &= 1 + \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} + \ldots \\ &= 1 + 3\Big(\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots\Big) = 1 + 3\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{100}\Big)^n \\ &= 1 + 3\,\frac{1/100}{1 - 1/100} = 1 + 3\,\frac{1}{99} = \frac{102}{99} = \frac{34}{33} \end{aligned}$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Drücken Sie den Wert von $\boxed{\prod_{j=2}^{n} \frac{j+1}{j-1}}$ mittels eines *Binomialkoeffizienten* aus. *[c): 2 P.]*

Hinweis: Sie sollen hier nicht Induktion verwenden, sondern einfach das 'Muster' richtig erkennen.

$$\prod_{j=2}^{n} \frac{j+1}{j-1} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdots \frac{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)!\,/\,2}{(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

d) Beweisen Sie Ihr Resultat aus c) mittels *Induktion* (Induktionsanfang bei $n = 1$). *[d): 1 **Extra**-P.]*

- Induktionsanfang ($n = 1$): leeres Produkt $= 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\prod_{j=2}^{n+1} \frac{j+1}{j-1} \overset{\text{ind}}{=} \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n+2}{n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \binom{n+2}{2} \quad ✓$$

- **Aufgabe 3.**

a) Zeigen Sie mittels *Induktion*, dass die Zahl $\boxed{5^n - 1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar ist. *[a): 2.5 P.]*

- Induktionsanfang ($n = 1$): $5^1 - 1 = 4$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned} 5^{n+1} - 1 &= \left(5^{n+1} - 5^n\right) + \left(5^n - 1\right) \\ &= (5-1)\,5^n + \left(5^n - 1\right) \\ &\overset{\text{ind}}{=} 4 \cdot 5^n + 4\,k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \quad 5^{n+1} - 1 &\text{ ist ebenfalls durch 4 teilbar.} \quad ✓ \end{aligned}$$

b) Die Folge $\{b_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{b_1 = 1 \quad \text{und} \quad b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) b_{n-1}\,, \quad n > 1}$

Entscheiden Sie, ob die Folge $\{b_n\}$ eine Nullfolge ist. Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent? [b): 1.5 P.]

Anmerkung: Ein bisschen rechnen, dann erkennt man es. (Streng formal gesehen ist das ein — sehr einfaches — Induktionsargument.)

Es gilt

$$b_2 = \frac{1}{2}\,b_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad b_3 = \frac{2}{3}\,b_2 = \frac{1}{3}\,, \qquad b_4 = \frac{3}{4}\,b_3 = \frac{1}{4}\,, \qquad \text{usw.}$$

Also mittels offensichtlichem Induktionsargument:

$$\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \quad \text{ist Nullfolge.}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist divergent (harmonische Reihe).

c) Berechnen Sie den Wert der Summe $\boxed{3 \sum_{j=0}^{n} 2^j\, 5^{n-j}}$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Das Ergebnis ist als *Differenz zweier natürlicher Zahlen* darzustellen. *[c): 2 P.]*

Umformen in geometrische Summe:

$$3 \sum_{j=0}^{n} 2^j\, 5^{n-j} = 3 \cdot 5^n \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^j = 3 \cdot 5^n \, \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{5} - 1} = 3 \cdot \frac{\frac{2^{n+1}}{5} - 5^n}{-\frac{3}{5}} = 5^{n+1} - 2^{n+1}$$