Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien

WS 2006/07

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

1. Test am 25. Oktober 2006

Gruppe blau, mit Lösung

↑ **Name**	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

1. Sei $f(x) = \arcsin(x)$ definiert durch $\sin(f(x)) = x$. Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$.
2. Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution den Integralwert

$$\int_0^\pi \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$$

LÖSUNG

1. Gemäß Skriptum ist gilt für die Umkehrfunktion $f = g^{-1}$ von g:

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))},$$

also für $g(x) = \sin x$, $f(x) = \arcsin x$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

2. Was bietet sich an? Der Zähler ist stark verwandt zur Ableitung des Nenners; das hat einen logarithmischen Stallgeruch. Also probieren wir

$$1+x^4 = \xi, \quad 4x^3\,dx = d\xi, \quad \frac{x^3\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\,\frac{d\xi}{\xi},$$

und daher

$$\int_{x=0}^{\pi} \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int_{\xi=1}^{1+\pi^4} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{4}\,\ln\xi\,\Big|_{\xi=1}^{1+\pi^4} = \frac{1}{4}\,\ln(1+\pi^4)\,.$$

Bewertung: mittelschwer.