Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien

WS 2006/07

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

2. Test am 14. November 2006

Gruppe blau, mit Lösung

↑ **Name** (BLOCKBUCHSTABEN)	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

Sollten Sie die Blattrückseite verwenden, schreiben Sie bitte unten rechts "%"

1. Gegeben ist die Raumkurve $\mathbf{r}(t) = (3t, \sin(3t), \cos(3t))$, $t \in \mathbb{R}$.

   a) Geben Sie den normalisierten Tangentenvektor $\mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ an.

   b) Berechnen Sie $\mathbf{b}(t) := \mathbf{a}'(t)$ und zeigen Sie, daß $\mathbf{b}(t)$ senkrecht auf $\mathbf{a}(t)$ steht.

   c) Bestimmen Sie einen dritten Vektor $\mathbf{c}(t)$, der senkrecht auf $\mathbf{a}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ steht.

   d) Was ist der Fächeninhalt des von $\mathbf{a}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ aufgespannten Parallelogramms?

2. Gegeben sind 2 Ebenen mit den Gleichungen $x + y + z = 0$ und $x + 2y + 3z = 0$. Geben Sie die Schnittgerade in der Form $\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$, $t \in \mathbb{R}$ an.

LÖSUNG

1. a) $\mathbf{r}'(t) = 3\,(1, \cos(3t), -\sin(3t))$ (Kettenregel), mit $|\mathbf{r}'(t)|^2 = 9\,(1 + \cos^2(3t) + \sin^2(3t)) \equiv 18$. Also:
   $\mathbf{a}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1, \cos(3t), -\sin(3t))$

   b) $\mathbf{b}(t) := \mathbf{a}'(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,(0, -\sin(3t), -\cos(3t))$, mit
   $\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t) = \frac{3}{2}\,(0 - cs + sc) = 0$ $\qquad (c := \cos(3t),\ s := \sin(3t))$

   c) Äußeres Vektorprodukt: $\mathbf{c} := \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ steht senkrecht auf $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

   $$\mathbf{c} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ c \\ -s \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -s \\ -c \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ c \\ -s \end{pmatrix}$$

   d) Der Flächeninhalt ist gleich $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = \frac{3}{2}\sqrt{1 + c^2 + s^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ für beliebige t. (Tatsächlich handelt es sich um ein Rechteck, weil $\mathbf{b}$ senkrecht auf $\mathbf{a}$.)

2. Die beiden Gleichungen sind l.u. und haben eine eindimensionale Lösungsschar (= Schnittgerade). Mit der Wahl $x = t$ erhalten wit für y, z die Gleichungen $y + z = -t$, $2y + 3z = -t$, mit der eindeutigen Lösung $y = -2t$, $z = t$. Daher: Schnittgerade

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bewertung: eher leicht, aber einige Rechenarbeit.