

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

3. Test am 28. November 2006

Gruppe weiß, [mit Lösung](#)

↑ Name (BLOCKBUCHSTABEN)	↑ Vorname	↑ Kennz. / MatrNr.	Punkte (max. 6)

Sollten Sie die Blattrückseite verwenden, schreiben Sie bitte unten rechts “%”

Zu bestimmen sei das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ des Vektorfeldes

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve C , die die beiden Punkte $\mathbf{r}_1 = (0, 4)$ und $\mathbf{r}_2 = (2, 0)$ verbindet, wobei sich C aus dem Geradenstück von \mathbf{r}_1 nach $(0, 0)$ und aus dem Geradenstück von $(0, 0)$ nach \mathbf{r}_2 zusammensetzt.

Man führe die Berechnung durch

- in direkter Weise entlang von C ,
- mit Hilfe eines Potentials von \mathbf{F} .
- Wie lautet der Wert des Kurvenintegrals entlang der direkten geradlinigen Verbindung von \mathbf{r}_2 zurück nach \mathbf{r}_1 ?

LÖSUNG

- a) Parametrisierung der beiden Geradenstücke, Tangentialvektor $\mathbf{r}'(t)$ und $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$:

$$C_1: \mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4-t \end{pmatrix}, t = 0 \dots 4; \quad \mathbf{r}_1'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 3(4-t)^2 \end{pmatrix}$$

$$C_2: \mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, t = 0 \dots 2; \quad \mathbf{r}_2'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^4 \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}_1'(t) dt + \int_{t=0}^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}_2'(t) dt = \dots = -10$$

- b) Es gilt $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y) = \nabla E(x, y)$, mit Potential $E(x, y) = \frac{1}{6}(x^2 + y^3)$

$$\Rightarrow \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = E(2, 0) - E(0, 4) = -10$$

- c) Geradenstück ergänzt C zu einer geschlossenen Kurve, Integral über geschlossene Kurve = 0; bzw. Wegunabhängigkeit von $\int_C \nabla E \cdot d\mathbf{r}$

$$\Rightarrow \text{Integral über Geradenstück} = 10.$$

Bewertung: eher leicht, Routinerechnung.