Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien

WS 2006/07

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

4. Test am 13. Dezember 2006

Gruppe weiß, mit Lösung

↑ **Name** (BLOCKBUCHSTABEN)	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

Sollten Sie die Blattrückseite verwenden, schreiben Sie bitte unten rechts "%"

Im $\mathbb{R}^2$ sei das Skalarfeld $f(x,y) = x^2 - y^2$ gegeben. Weiters sei K der Abschnitt des Kreisringes mit Zentrum im Ursprung, innerem Radius $a > 0$ und äußerem Radius $b > a$, der im ersten Quadranten $\{(x,y): \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$ liegt. Man berechne des Flächenintegral

$$\int_K x\, y\, |\nabla f(x,y)|^2 \, d(x,y)\,.$$

LÖSUNG

$f(x,y) = x^2 - y^2; \ \nabla f(x,y) = (2x, -2y), \ |\nabla f(x,y)|^2 = 4(x^2+y^2); \quad \Rightarrow \quad I = 4\int_K xy(x^2+y^2)\, d(x,y)$

- Polarkoordinaten: $\quad xy = r^2 \sin\varphi \cos\varphi = \frac{r^2}{2}\sin(2\varphi)$

$$\Rightarrow \quad I = 4 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=a}^{b} \frac{r^4}{2} \sin(2\varphi) \overset{\downarrow}{r}\, dr\, d\varphi \qquad \text{(Funktionaldeterminante} = r)$$

Also

$$\begin{aligned} I \ &= \ 2\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\varphi)\, d\varphi \cdot \int_{r=a}^{b} r^5\, dr = \ [\text{Substitution } 2\varphi = \psi\,] \ = 2\int_{\psi=0}^{\pi} \sin(\psi)\, \tfrac{1}{2}\, d\psi \cdot \int_{r=a}^{b} r^5\, dr \\ &= \ -\cos\psi \Big|_{\psi=0}^{\pi} \cdot \frac{r^6}{6}\Big|_{r=a}^{b} = \frac{b^6 - a^6}{3}\,. \end{aligned}$$

Bewertung: eher leicht.