Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien

WS 2006/07

# PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Haupttest am 19. Januar 2007

Gruppe grün, mit Lösung

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| ↑ **Name** (BLOCKBUCHSTABEN) | ↑ **Vorname** | ↑ **Kennz. / MatrNr.** |

Bewertung:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| Beispiel 1 | Beispiel 2 | Beispiel 3 | GESAMT (max. 18 P.) |

- **Beispiel 1.**

Die Kurve $C$ sei gegeben durch

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(u) := \begin{pmatrix} u^2 \sin u \\ u^2 \cos u \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\, u^3 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u \le \sqrt{15} \right\}.$$

a) Man gebe die Parametrisierung $\tilde{\boldsymbol{r}}$ dieser Kurve nach der Bogenlänge an.

b) Was ist die Länge $L$ der Kurve $C$ ?

c) Ein Massepunkt bewege sich auf der Kurve vom Anfangspunkt $\boldsymbol{r}(0)$ bis zum Endpunkt $\boldsymbol{r}(\sqrt{15})$. Sein Ort zum Zeitpunkt $t$ sei $\tilde{\boldsymbol{r}}(s(t))$, wobei $\tilde{\boldsymbol{r}}$ die in a) eingeführte Parametrisierung nach der Bogenlänge ist und $s(t)$ gegeben sei durch $s(0) = 0$ und $\dot{s}(t) = t$.

   Wann trifft der Massepunkt am Endpunkt $\boldsymbol{r}(\sqrt{15})$ der Kurve ein?

LÖSUNG

a) Bogenlänge als Funktion von $u$:

$$s(u) = \int_{v=0}^{u} |\boldsymbol{r}'(v)|\, dv, \quad \text{mit} \quad |\boldsymbol{r}'(v)| = \left| \begin{pmatrix} 2\,v \sin v + v^2 \cos v \\ 2\,v \cos v - \, v^2 \sin v \\ \sqrt{3}\, v^2 \end{pmatrix} \right| = \ \ldots \ = 2\,v\,\sqrt{1+v^2},$$

also

$$\begin{aligned} s(u) &= 2 \int_{v=0}^{u} v\,\sqrt{1+v^2}\, dv = \ [\text{Substitution } 1+v^2 = \xi,\ 2v\,dv = d\xi\,] \\ &= \int_{\xi=1}^{1+u^2} \sqrt{\xi}\, d\xi = \frac{\xi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_{\xi=1}^{1+u^2} = \tfrac{2}{3} \left( (1+u^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Inversion dieses Zusammenhanges (Auflösen nach $s \ge 0$) ergibt

$$u = u(s) = \sqrt{\left(1 + \tfrac{3}{2} s\right)^{\frac{2}{3}} - 1}\,,$$

und Einsetzen in die gegebene Parameterdarstellung für $C$ ergibt die Parametrisierung über die Bogenlänge als $\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{r}(u(s))$.

b) Für $u = \sqrt{15}$ folgt aus a): $L = 42\,.$

c) Integration der vorgegebenen Beziehung $\dot{s}(t) = t$ liefert $s(t)$, d.h. wie weit sich der Massepunkt bis zum Zeitpunkt $t$ entlang der Kurve bewegt hat:

$$s(t) = \underbrace{s(0)}_{=\,0} + \int_{\tau=0}^{t} \dot{s}(\tau)\, d\tau = \int_{\tau=0}^{t} \tau\, d\tau = \frac{t^2}{2}\,,$$

und am Ende der Kurve ist $s(t) = L = 42$ gemäß b). Der gesuchte Zeitpunkt $t$ ist daher gegeben durch die Beziehung $\frac{t^2}{2} = 42$, also $t = 2\sqrt{21}$ Zeiteinheiten.

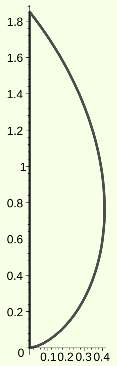
*Bewertung: eher schwierig.*

• **Beispiel 2.**

Auf einer Fläche ist eine Masse verteilt. Die Dichte $\rho$ ( = Masse pro Flächeneinheit) an einer beliebigen Position $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ sei gegeben durch

$$\rho \;=\; \rho(r,\varphi) \;=\; 3\,r^2\varphi\,.$$

Gesucht ist nun die gesamte Masse innerhalb der Fläche laut Grafik:




Die Fläche wird begrenzt durch die $y$-Achse und die durch

$$\boldsymbol{r}(s) \;=\; 3s(\cos(2\sqrt{s}), \sin(2\sqrt{s}))$$

gegebene Kurve. (Für $s=0$ startet die Kurve im Nullpunkt, und für ein gewisses $s>0$ kehrt sie zur $y$-Achse zurück.)

Man berechne die gesamte auf dieser Fläche verteilte Masse.

*Hinweis:* Rechnung in Polarkoordinaten (man überlege sich, wie man die $r$-Komponente der Randkurve in der Form $r = r(\varphi)$ darstellt).

LÖSUNG

Berechnung der Masse mittels eines Flächenintegrals; Rechnung in Polarkoodinaten $(r,\varphi)$. Hier ist es zweckmäßig, die gegebene Darstellung der Randkurve so umzuparametrisieren, dass $\varphi$ statt $s$ als Parameter auftritt: Mit $\varphi = 2\sqrt{s}$ erhalten wir $3s = \frac{3}{4}\,\varphi^2$, und damit eine Parametrisierung der Randkurve in der Gestalt (wir schreiben wieder $\boldsymbol{r}$)

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = (a(\varphi)\cos\varphi, a(\varphi)\sin\varphi), \quad \varphi = 0\ldots\tfrac{\pi}{2},$$

wobei $a(\varphi) = \frac{3}{4}\,\varphi^2$ der Abstand zum Ursprung ist.

Der Integrand (= Dichte $\rho$) ist bereits bezüglich Polarkoordinaten gegeben; die Funktionaldeterminante für Transformation eines Flächenintegrals von kartesischen auf Polarkoordinaten ist $\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right) = r\,$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{Masse} \;&=\; \int_{\text{Fläche}} \rho\, d(x,y) = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{a(\varphi)} \underbrace{\rho(r,\varphi)}_{=\,3r^2\varphi}\, r\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4}\,\varphi\, r^4\Big|_{r=0}^{\frac{3}{4}\varphi^2} d\varphi \\
&=\; \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4}\,\varphi \cdot \Big(\Big(\frac{3}{4}\,\varphi^2\Big)^4\Big)\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3^5}{2^{10}}\,\varphi^9\, d\varphi \\
&=\; \frac{3^5}{2^{10}\cdot 10}\,\varphi^{10}\Big|_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3^5}{2^{10}\cdot 10}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} = \frac{3^5}{2^{21}\cdot 5}\cdot\pi^{10}\,.
\end{aligned}$$

*Bewertung: eher schwierig.*

- **Beispiel 3.**

Gegeben sei das ebene Vektorfeld $\boldsymbol{a}(x,y) = \nabla g(x,y)$ mit $g(x,y) := 5\,x^2y^2$, und die Bahn eines Teilchens als $\boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s)) := \sqrt{s}\,(1,s)$.

a) Man bestimme den Wert des Kurvenintegrals

$$I(t) := \int_{C(t)} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$$

entlang des Kurvenabschnittes $C(t) := \{\boldsymbol{r}(s),\ 0 \le s \le t\}$, als Funktion in Abhängigkeit von $t$.

b) Man löse das Anfangswertproblem ($\dot{u} = du/dt$)

$$\dot{u}(t) = \frac{I(t)}{u(t)}, \quad u(0) = 1\,,$$

mit $I(t)$ aus a).

LÖSUNG

a) Laut Angabe ist $\boldsymbol{a} = \nabla\varphi$ ein Gradientenfeld $\quad\Rightarrow$

$$I(t) = g(\boldsymbol{r}(t)) - g(\boldsymbol{r}(0)) = 5\,(\sqrt{t})^2\,(\sqrt{t}\,t)^2 - 0 = 5\,t^4.$$

b) Aus a) ergibt sich die DGL

$$\dot{u} = \frac{5\,t^4}{u}\,.$$

Separation der Variablen und Integration ergibt

$$u\,du = 5\,t^4\,dt \quad\Rightarrow\quad \int_u u\,du = 5\int_t t^4\,dt,$$

also

$$\frac{u^2}{2} = t^5 + C.$$

Auflösen nach $u$ ergibt die allgemeine Lösung

$$u(t) = \pm\sqrt{2\,t^5 + 2C}\,.$$

Mit der Anfangsbedingung $u(0) = 1$ folgt $\sqrt{2C} = 1$, also $C = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$u(t) = +\sqrt{2\,t^5 + 1}\,.$$

*Anmerkung:* Für den Lösungszweig $-\sqrt{2\,t^5 + 2C}$ ist die Anfangsbedingung im nicht erfüllbar, d.h. die obige Lösung des Anfangswertproblems ist eindeutig.

*Bewertung: leicht.*