Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien

WS 2006/07

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Haupttest am 19. Januar 2007

Gruppe weiß, mit Lösung

↑ **Name** (BLOCKBUCHSTABEN)	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**

Bewertung:

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3	GESAMT (max. 18 P.)

- **Beispiel 1.**

Die Kurve C sei gegeben durch

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(u) := \begin{pmatrix} \sqrt{3}\, u^2 \cos u \\ \sqrt{3}\, u^2 \sin u \\ u^3 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u \le \sqrt{3} \right\}.$$

a) Man gebe die Parametrisierung $\tilde{\boldsymbol{r}}$ dieser Kurve nach der Bogenlänge an.

b) Was ist die Länge L der Kurve C?

c) Ein Massepunkt bewege sich auf der Kurve vom Anfangspunkt $\boldsymbol{r}(0)$ bis zum Endpunkt $\boldsymbol{r}(\sqrt{3})$. Sein Ort zum Zeitpunkt t sei $\tilde{\boldsymbol{r}}(s(t))$, wobei $\tilde{\boldsymbol{r}}$ die in a) eingeführte Parametrisierung nach der Bogenlänge ist und $s(t)$ gegeben sei durch $s(0) = 0$ und $\dot{s}(t) = \frac{14}{3}\sqrt{3}\, t$.

   Wann trifft der Massepunkt am Endpunkt $\boldsymbol{r}(\sqrt{3})$ der Kurve ein?

LÖSUNG

a) Bogenlänge als Funktion von u:

$$s(u) = \int_{v=0}^{u} |\boldsymbol{r}'(v)|\, dv, \quad \text{mit } |\boldsymbol{r}'(v)| = \left| \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\, v \cos v - \sqrt{3}\, v^2 \sin v \\ 2\sqrt{3}\, v \sin v + \sqrt{3}\, v^2 \cos v \\ 3\, v^2 \end{pmatrix} \right| = \ldots = 2\sqrt{3}\, v \sqrt{1+v^2},$$

also

$$\begin{aligned} s(u) &= 2\sqrt{3} \int_{v=0}^{u} v\sqrt{1+v^2}\, dv = \left[\text{Substitution } 1+v^2 = \xi,\ 2v\, dv = d\xi \right] \\ &= \sqrt{3} \int_{\xi=1}^{1+u^2} \sqrt{\xi}\, d\xi = \sqrt{3}\, \frac{\xi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_{\xi=1}^{1+u^2} = \tfrac{2\sqrt{3}}{3} \left((1+u^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Inversion dieses Zusammenhanges (Auflösen nach $s \ge 0$) ergibt

$$u = u(s) = \sqrt{\left(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2} s\right)^{\frac{2}{3}} - 1}\,,$$

und Einsetzen in die gegebene Parameterdarstellung für C ergibt die Parametrisierung über die Bogenlänge als $\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{r}(u(s))$.

b) Für $u = \sqrt{3}$ folgt aus a): $L = \frac{14}{3}\sqrt{3}$.

c) Integration der vorgegebenen Beziehung $\dot{s}(t) = \frac{14}{3}\sqrt{3}\, t$ liefert $s(t)$, d.h. wie weit sich der Massepunkt bis zum Zeitpunkt t entlang der Kurve bewegt hat:

$$s(t) = \underbrace{s(0)}_{=\,0} + \int_{\tau=0}^{t} \dot{s}(\tau)\, d\tau = \tfrac{14}{3}\sqrt{3} \int_{\tau=0}^{t} \tau\, d\tau = \tfrac{14}{3}\sqrt{3}\, \frac{t^2}{2}\,,$$

und am Ende der Kurve ist $s(t) = L = \frac{14}{3}\sqrt{3}$ gemäß b). Der gesuchte Zeitpunkt t ist daher gegeben durch die Beziehung $\frac{14}{3}\sqrt{3}\,\frac{t^2}{2} = \frac{14}{3}\sqrt{3}$, also $t = \sqrt{2}$ Zeiteinheiten.

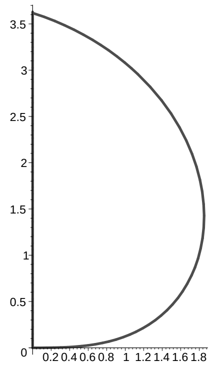
Bewertung: eher schwierig.

• **Beispiel 2.**

Auf einer Fläche ist eine elektrische Ladung verteilt. Die Ladungsdichte λ (= Ladung pro Flächeneinheit) an einer beliebigen Position $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ sei gegeben durch

$$\lambda \;=\; \lambda(r, \varphi) \;=\; 2\,r\varphi\,.$$

Gesucht ist nun die gesamte Ladung innerhalb der Fläche laut Grafik:



Die Fläche wird begrenzt durch die y-Achse und durch die Bahn eines Teilchens, die gegeben ist durch

$$\boldsymbol{r}(t) \;=\; (x(t), y(t)) \;=\; 5t(\cos(3t^2), \sin(3t^2))\,.$$

(Für $t = 0$ befindet sich das Teilchen im Nullpunkt, und für ein gewisses $t > 0$ landet es auf weiter oben auf der y-Achse.)

Man berechne die gesamte auf dieser Fläche verteilte Ladung.

Hinweis: Rechnung in Polarkoordinaten (man überlege sich, wie man die r-Komponente der Randkurve in der Form $r = r(\varphi)$ darstellt).

LÖSUNG

• *Bahn des Teilchens:* Am oberen Endpunkt ist (bez. Polarkoordinaten) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (Winkel 90°), und zwar zum Zeitpunkt $t = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$, wie aus der Gleichung $\varphi(t) = 3t^2 = \frac{\pi}{2}$ folgt.

• *Geschwindigkeit des Teilchens:* Differenzieren von $\boldsymbol{r}(t)$ ergibt

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \ldots = (5\cos(3t^2) - 30\,t^2\sin(3t^2), 5\sin(3t^2) + 30\,t^2\cos(3t^2))$$

• *Berechnung der Ladung als Flächenintegral:*

Rechnung in Polarkoordinaten. Dazu ziehen wir folgende Gleichung heran: Laut Angabe besteht entlang der Randkurve die Beziehung

$$\varphi(t) = 3t^2, \quad r(t) = 5t\,.$$

Für die Berechnung des Integrals eliminieren wir t:

$$\varphi = 3t^2, \quad r = 5\sqrt{\frac{\varphi}{3}}\,.$$

Die Funktionaldeterminante für Transformation von kartesischen auf Polarkoordinaten ist $\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right) = r\,.\quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\text{Gesamtladung} &= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{5\sqrt{\frac{\varphi}{3}}} \underbrace{\lambda(r,\varphi)}_{=\,2r\varphi}\, r\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\,\varphi\, r^3\Big|_{r=0}^{r=5\sqrt{\frac{\varphi}{3}}}\, d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\,\varphi \cdot \left(5^3 \left(\frac{\varphi}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cdot 125}{3^{\frac{5}{2}}}\,\varphi^{\frac{5}{2}}\, d\varphi \\
&= \frac{250\cdot 2}{3^{\frac{5}{2}}\cdot 7}\,\varphi^{\frac{7}{2}}\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{500}{3^{\frac{5}{2}}\,2^{\frac{7}{2}}\cdot 7}\,\pi^{\frac{7}{2}} = \frac{125\sqrt{6}}{756}\pi^{\frac{7}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Bewertung: eher schwierig.

- **Beispiel 3.**

Gegeben sei das ebene Vektorfeld $\boldsymbol{F}(x,y) = (\varphi_x(x,y), \varphi_y(x,y))$ mit $\varphi(x,y) := 7\,x^3y^3$, und die ebene Kurve durch $\boldsymbol{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau)) := (\tau\sqrt{\tau}, \sqrt{\tau})$.

a) Man bestimme den Wert des Kurvenintegrals

$$I(t) \;:=\; \int_{C(t)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

entlang des Kurvenabschnittes $C(t) = \{\boldsymbol{r}(\tau),\ 0 \leq \tau \leq t\}$, als Funktion in Abhängigkeit von t.

b) Man löse das Anfangswertproblem ($\dot{u} = du/dt$)

$$\dot{u}(t) \;=\; I(t)\, e^{-u(t)}, \quad u(0) = 0$$

mit $I(t)$ aus a).

LÖSUNG

a) Laut Angabe ist $\boldsymbol{F} = \nabla\varphi$ ein Gradientenfeld $\quad\Rightarrow$

$$I(t) = \varphi(\boldsymbol{r}(t)) - \varphi(\boldsymbol{r}(0)) = 7\,(t\,\sqrt{t})^3\,(\sqrt{t})^3 - 0 = 7\,t^6\,.$$

b) Aus a) ergibt sich die DGL

$$\dot{u} = 7\,t^6\,e^{-u}.$$

Separation der Variablen und Integration ergibt

$$e^u\,du = 7\,t^6\,dt \quad\Rightarrow\quad \int_u e^u\,du = 7\int_t t^6\,dt,$$

also

$$e^u = t^7 + C.$$

Auflösen nach u ergibt die allgemeine Lösung

$$u(t) = \ln(t^7 + C)\,.$$

Mit der Anfangsbedingung $u(0) = 0$ folgt $\ln(C) = 0$, also $C = 1 \quad\Rightarrow$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$u(t) = \ln(t^7 + 1)\,.$$

Bewertung: leicht.