Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien

WS 2006/07

# PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

1. Test am 25. Oktober 2006

Gruppe rot

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| ↑ **Name** | ↑ **Vorname** | ↑ **Kennz. / MatrNr.** | Punkte (max. 6) |

1. Sei $f(x) = \arccos(x)$ definiert durch $\cos(f(x)) = x$. Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$.
2. Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution den Integralwert

$$\int_0^1 \frac{x^7}{1+x^8}\,dx$$

LÖSUNG

1. Gemäß Skriptum ist gilt für die Umkehrfunktion $f = g^{-1}$ von $g$:

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))},$$

also für $g(x) = \cos x$, $f(x) = \arccos x$ :

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

2. Was bietet sich an? Der Zähler ist stark verwandt zur Ableitung des Nenners; das hat einen logarithmischen Stallgeruch. Also probieren wir

$$1 + x^8 = \xi, \quad 8x^7\,dx = d\xi, \quad \frac{x^7\,dx}{1+x^8} = \frac{1}{8}\,\frac{d\xi}{\xi},$$

und daher

$$\int_{x=0}^1 \frac{x^7}{1+x^8}\,dx = \frac{1}{8}\int_{\xi=1}^{1+1} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{8}\,\ln\xi\,\Big|_{\xi=1}^2 = \frac{1}{8}\,\ln 2\,.$$

*Bewertung: mittelschwer.*